

SERIE : B

N° D'ORDRE 39

N° DE SERIE : 36

THESE

présentée devant

L'UNIVERSITE DE RENNES

U. E. R. Structure et Propriétés de la Matière

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR

par

LIONEL MARCE

Ingénieur E. S. E.

sujet de la thèse :

ETUDE DE QUELQUES METHODES D'IDENTIFICATION :
APPLICATION A UN PROCESSUS HYDRAULIQUE.

Soutenue le 24 Septembre 1973 devant la Commission d'Examen

MM. P.Y. ARQUES

Président

R. GERBER

P. DE LARMINAT

Examineurs

J. Y. MEVEL



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553611_0021

SERIE : B
N° d'ORDRE : 39
N° de SERIE : 36

THESE
présentée

DEVANT L'UNIVERSITE de RENNES

U. E. R. STRUCTURE et PROPRIETES de la MATIERE

pour obtenir

le titre de DOCTEUR INGENIEUR

PAR

Lionel MARCE
Ingénieur E.S.E.

Sujet de la Thèse

ETUDE DE QUELQUES METHODES D'IDENTIFICATION :
APPLICATION A UN PROCESSUS HYDRAULIQUE.

Soutenue le 24 septembre 1973 devant la Commission d'Examen

MM. P.Y. ARQUES Président

R. GERBER

P. DE LARMINAT

J.Y. MEVEL

} Examineurs



UNIVERSITE DE RENNES

U.E.R. issues de la FACULTE DES SCIENCES

Doyens Honoraires

M. MILON Y.
M. TREHIN R.
M. SCHMITT M.
M. LE MOAL H.
M. MARTIN Y.
M. BOCLE J.

Professeurs Honoraires

M. FREYMANN R.
M. HAGENE P.
M. POISSON R.
M. ROHMER R.
M. TREHIN R.
M. SALMON-LEGAGNEUR F.
M. des ABBAYES H.
M. MILON Y.

Maîtres de Conférences Honoraires

M. GRILLET L.
M. LECRECO A.

Mathématiques

Professeurs

Melle CHARPENTIER M.
M. GUERINDON J.
M. METIVIER M.
M. GIORGIUTTI I.
M. BRUNEL A.
M. TOUGERON J. C.
M. MIGNOT A.

Maîtres de Conférences & Chargés de Cours

M. LEGOUPIL J.
M. HOUDEBINE J.
M. EUVRARD D.
M. NEDELEC J. C.
M. VERJUS J. P.
M. TRILLING L.
M. FERRAND D.
M. GUIVARC'H Y.
M. KEANE M. (M. C. associé)
M. GILDELAMADRID (Prof. associé)

Physique

M. VACHER M.
M. VIGNERON L.
M. LE BOT J.
Mme ROBIN née SALOMOND
M. ROBIN S.
M. LE MONTAGNER S.
M. MEVEL J. Y.
M. MEINNEL J.
M. REGENSTREIF E.
M. BRUN P.
M. LE ROUX E.
M. DUBOST

M. GUIDINI
M. HAEUSLER C.
M. ARQUES P. Y.
M. DECAMPS E.
M. NUSIMOVICI M. A.

Chimie

M. VENE J.
M. LE MOAL H.
M. LEVAS E.
M. PELTIER D.
M. PRIGENT J.
M. JOUAN P.
M. FOUCAUD A.
M. LANG J.
M. CARRIE R.
M. GUERILLOT C.
M. KERFANTO M.
M. DABARD R.

M. GRANDJEAN D.
M. LUCAS J.
M. DUVAL J.
M. MARTIN G.

Zoologie

M. RICHARD G.
M. MAILLET P.
M. BOISTEL J.
M. RAZET P.
M. FOLLIOT R.
M. ALLEGRET P.
M. MANIEY J.
M. JOLY J.
M. POSTEL (Professeur associé)

M. LEFEUVRE J.C.

Botanique

M. VILLERET S.
M. CLAUSTRES G.
Mlle GOAS M.
Mlle GOAS G.

Mme LEMOINE C.
M. TOUFFET

Géologie

M. COGNE J.
Mlle DURAND S.
M. PHILIPPOT A.

M. BOILLOT G.
M. HAMEURT J.

Le Secrétaire Général de l'Université

M. BOURDIGUEL R.

Ce travail a été effectué dans le laboratoire du Département de Physique de l'Institut National des Sciences Appliquées de RENNES.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur P.Y. ARQUES d'avoir bien voulu présider la Commission d'Examen.

Je suis heureux de pouvoir exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur R. GERBER, qui m'a accueilli dans son équipe de recherche et m'a donné l'idée de ce travail.

Je désire également exprimer ma reconnaissance à Monsieur P. DE LARMINAT, qui m'a fait profiter de sa grande expérience dans les problèmes d'identification.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur J.Y. MEVEL, qui m'a fait l'honneur de faire partie de la Commission d'Examen.

Que toute l'équipe du laboratoire (et en particulier, Monsieur C. BRIE pour ses conseils en Informatique, Monsieur Y. BOUFFORT pour son aide technique, Mesdames M.T. JULLIERE et D. ROGER pour la frappe de ce mémoire) trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

S O M M A I R E

	page
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I - ETUDE PHYSIQUE DU PROCESSUS.....	3
I-1-Description du système.....	3
I-1-1-Le processus à deux cuves.....	3
I-1-2-Le système informatique.....	8
I-2-Etablissement d'un modèle mathématique du processus à deux cuves à partir de considérations physiques.....	8
I-2-1-Hypothèses de simplification.....	8
I-2-2-Etablissement du modèle.....	9
I-3-Etude statique du processus hydraulique.....	12
I-3-1-Méthode.....	12
I-3-2-Résultats.....	13
CHAPITRE II - METHODE DE LA REPONSE A UN ECHELON OU IMPULSIONNELLE APPROCHEE PAR UNE SOMME D'EXPONENTIELLES.....	19
II-1-Principe.....	19
II-2-Approximation d'une courbe par une somme d'exponentielles.....	21
II-2-1-Application graphique.....	22
II-2-2-Application numérique ; (programme sur CII 10070).....	23
II-2-2-1-Détermination des valeurs approchées d'un couple α_i, T_i	23
II-2-2-2-Amélioration de la valeur des coefficients des exponentielles par une régression non linéaire...	25
II-3-Approche de la réponse à un échelon par une somme d'exponen- tielles.....	30
II-3-1-Méthode graphique.....	30
II-3-2-Méthode sur calculateur.....	33
CHAPITRE III - METHODE DES MOINDRES CARRES AMELIOREE PAR K. STEIGLITZ ET L.E. MAC BRIDE.....	40
III-1-Méthode des moindres carrés simple.....	40
III-2-Méthode de K. STEIGLITZ et L.E. MAC BRIDE.....	49
III-3-Identification par la méthode des moindres carrés simple et celle améliorée par K. Steiglitz et L.E. Mac Bride.....	53

III-3-1-Choix du modèle en z.....	53
III-3-2-Algorithme de la méthode des moindres carrés.....	55
III-3-3-Etude simulée sur la réponse à une séquence binaire pseudo-aléatoire.....	57
III-3-3-1-Test de la méthode des moindres carrés.....	57
III-3-3-2-Test de la méthode des moindres carrés améliorée par K. STEIGLITZ et L.E. MAC BRIDE.....	60
III-3-4-Application de la méthode des moindres carrés aux mesu- res directes.....	62
CHAPITRE IV - IDENTIFICATIONS A PARTIR DE LA SEQUENCE DE PONDERA- TION OBTENUE PAR CORRELATION.....	
IV-1-Principe.....	70
IV-1-1-Obtention de la réponse impulsionnelle.....	72
IV-1-2-Obtention de la réponse indicielle.....	73
IV-1-3-Calcul de la séquence de pondération par corrélation....	73
IV-1-4-Méthode par corrélation avec une SBPA comme entrée.....	75
IV-2-Etude de la méthode de la présence de bruit.....	76
IV-2-1-Séquence de pondération.....	76
IV-2-2-Réponse impulsionnelle.....	78
IV-2-3-Réponse indicielle.....	79
IV-3-Choix des paramètres de la SBPA.....	81
IV-3-1-A partir des spectres respectifs du système et de la SBPA.....	81
IV-3-2-A partir de considérations sur les variances.....	83
IV-4-Etude expérimentale.....	84
IV-4-1-Identification d'un système du deuxième ordre simulé....	84
IV-4-1-1-Réponse impulsionnelle.....	85
IV-4-1-2-Réponse indicielle.....	87
IV-4-2-Identification du processus hydraulique.....	94
IV-4-2-1-Réponse impulsionnelle.....	101
IV-4-2-2-Réponse indicielle.....	108

CHAPITRE V - COMPARAISON DES DIFFERENTES METHODES D'IDENTIFICATION EMPLOYEES.....	111
V-1-Passage du modèle en p au modèle en z et réciproquement.....	112
V-1-1-Passage du modèle en p au modèle en z.....	112
V-1-2-Passage du modèle en z au modèle en p.....	113
V-1-3-Résultats.....	113
V-2-Comparaison des sorties des différents modèles à une même en- trée avec une sortie expérimentale correspondant à la même entrée.....	113
V-3-Comparaison des mises en oeuvre.....	118
CONCLUSION.....	121
ANNEXE.....	122
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	126

I N T R O D U C T I O N

L'apparition de petits calculateurs pouvant travailler en temps réel permet d'introduire au niveau de la commande des processus, des techniques mathématiques d'optimisation jusqu'alors purement théoriques. Cependant ces méthodes nécessitent une connaissance approfondie du processus car elles sont souvent très sensibles aux paramètres du modèle mathématique.

Nous étudions quelques méthodes d'identification que nous appliquons ensuite à la recherche d'un modèle mathématique d'un processus hydraulique à deux cuves en série.

Nous exposons trois méthodes d'identification dynamiques :

. La décomposition de la réponse à un échelon ou impulsionnelle en somme d'exponentielles fournit comme caractérisation une fonction de transfert en p .

. Le choix d'un modèle en z débouche sur la résolution d'un système d'équations linéaires surabondant. La méthode des moindres carrés améliorée par K. Steiglitz et L.E. Mac Bride fournit une estimation de ce modèle.

. La corrélation à l'aide d'un calculateur de 8 kmots de 16 bits en ligne entre un signal binaire pseudoaléatoire excitant le système et sa réponse fournit comme modèles la réponse indicielle ou impulsionnelle.

Pour chaque méthode nous décrivons son principe puis son application à un processus réel.

Nous terminons par une étude comparative des diverses méthodes dans le cas de notre processus à deux cuves.

C H A P I T R E I

Dans le début de ce chapitre est décrit le processus à deux cuves et son système de mesures et de commande ; puis est déduit des lois de la physique un premier modèle dynamique dont on estime les paramètres inconnus à partir de l'étude statique du processus.

L'étude théorique liée à l'expérimentation statique montre que le processus peut être approché par un système non linéaire d'ordre 2 à coefficients constants qui peut être facilement linéarisé.

I - 1 - DESCRIPTION DU SYSTEME

I - 1 - 1 - LE PROCESSUS A DEUX CUVES

Le système est composé essentiellement de deux cuves de dimensions identiques placées l'une au-dessus de l'autre (fig. I,1 et I,2). La cuve supérieure (cuve n°1) est alimentée en eau de ville à pression constante par un bac à déversoir. Le débit d'entrée D_e est contrôlé par une vanne électropneumatique V_e . La cuve inférieure (cuve n°2) est alimentée à partir de la cuve n°1. Une vanne manuelle V_i , placée entre les deux cuves, permet de faire varier le débit intermédiaire D_i . L'eau de la cuve inférieure s'écoule ensuite à l'égout, par l'intermédiaire d'une autre vanne manuelle V_s permettant de faire varier le débit de sortie D_s .

L'alimentation des deux cuves se fait par le bas, ce qui confère au système une stabilité intrinsèque puisque les débits dépendent des niveaux respectifs dans les cuves ⁽¹⁾.

L'instrumentation du processus construit pour la mise au point de méthodes d'identification et de commande de systèmes industriels est réduite au strict minimum.

Seuls deux capteurs permettent de prélever à tout instant des informations sur l'état du système (fig. I,4).

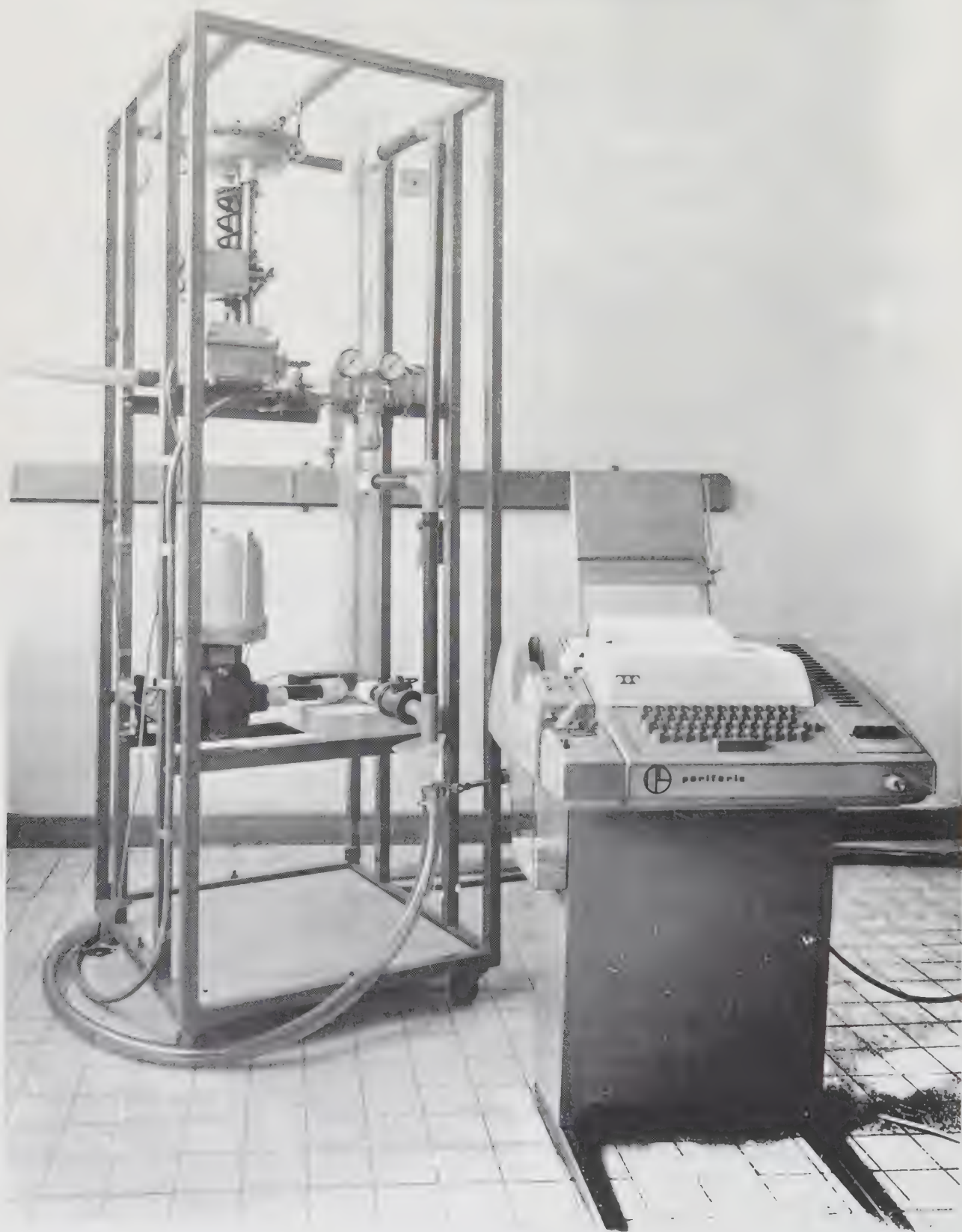


Fig. I, 1 - Processus à niveaux liquides
à 2 cuves en série.

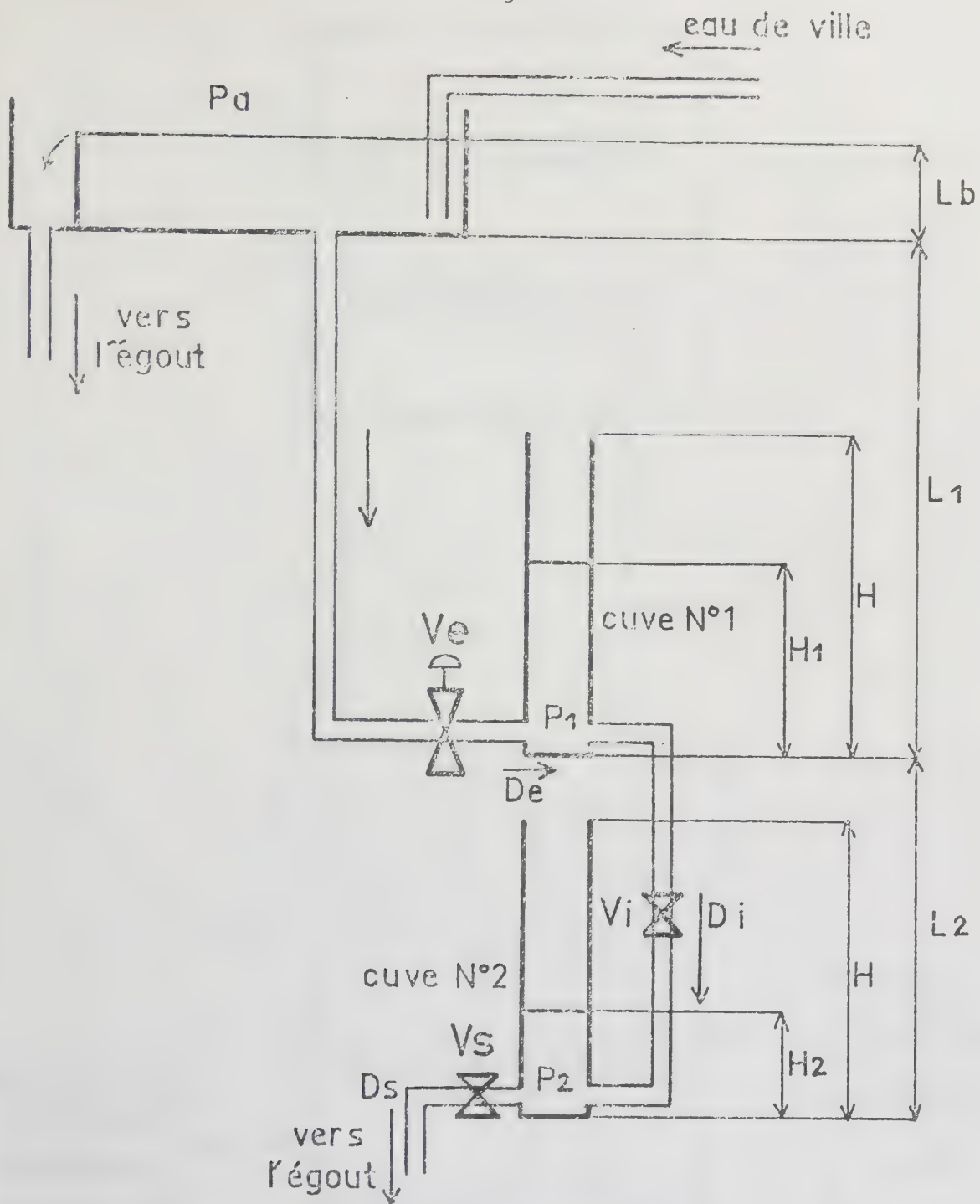


Fig1,2-Schéma de principe du processus hydraulique

Ve _ vanne électropneumatique d'entrée

Vi _ vanne manuelle intermédiaire

Vs _ vanne manuelle de sortie

S _ section des 2 cuves

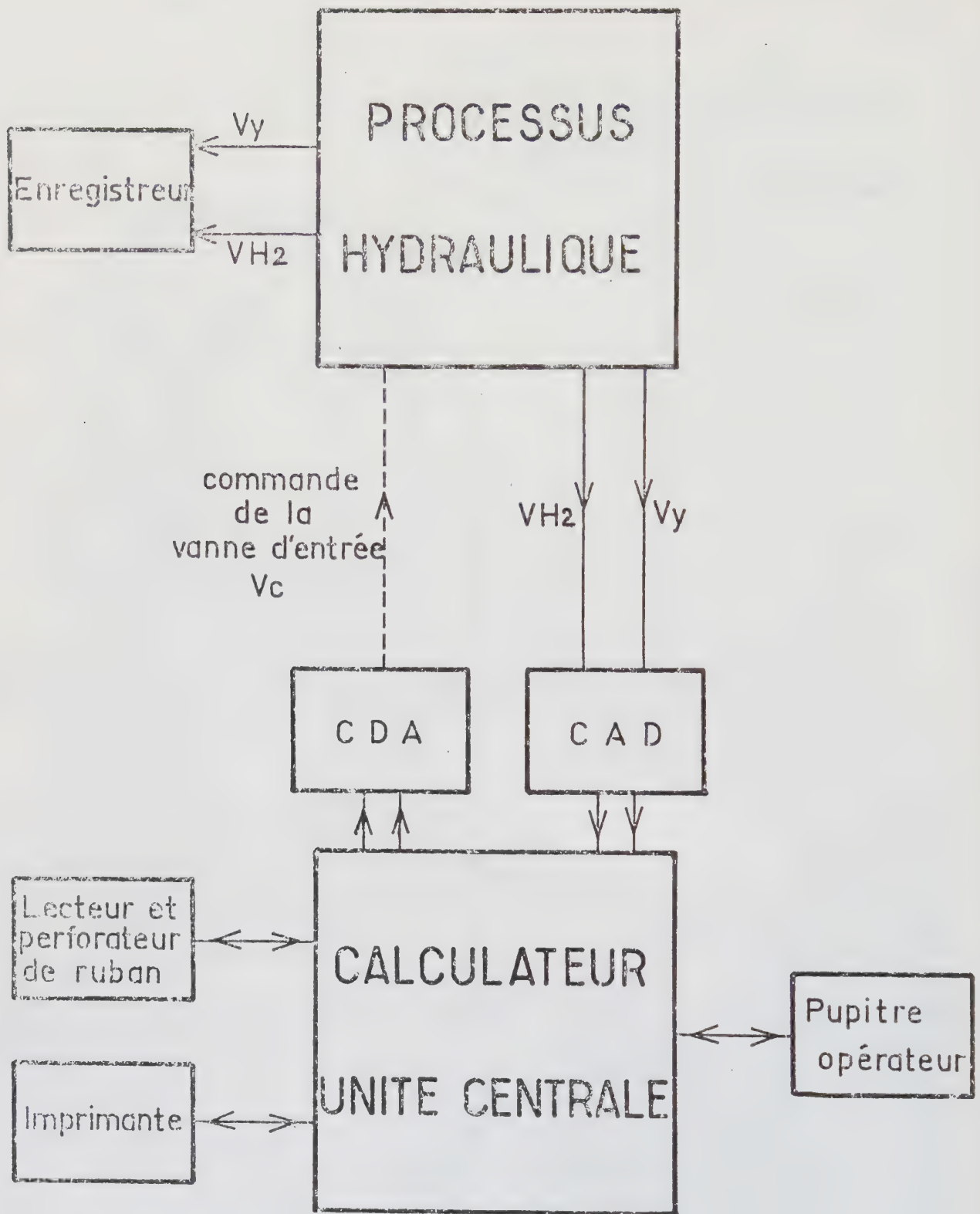


Fig.I, 3-Schéma général du système servant à l'identification du processus hydraulique

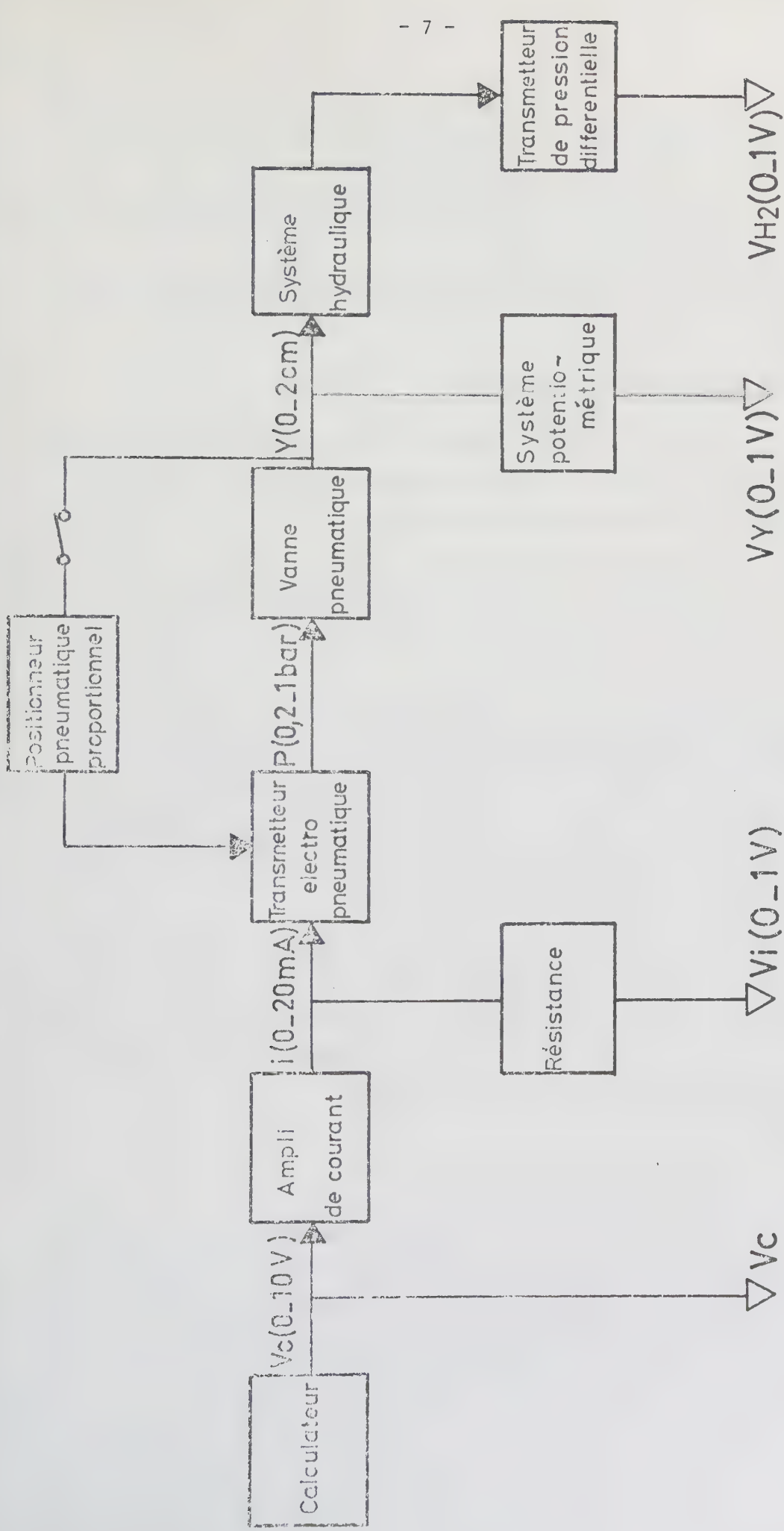


Fig.1, 4-Schéma de détail du système
de mesures et de commande

$$V_i = 0,05 \times i$$

$$V_y = 0,05 \times Y$$

$$V_{H2} = 0,190 \div 0,161 \cdot 10^{-2} H_2$$

V_i en V i en mA

V_y en V y en mm

V_{H2} en V H_2 en mm

. Un capteur de position potentiométrique qui mesure le déplacement de la membrane de la vanne électropneumatique.

. Un capteur de pression différentielle qui mesure la hauteur d'eau H_2 dans la cuve inférieure.

Il n'y a pas de capteurs de débit, ni de capteur mesurant la hauteur d'eau H_1 .

I - 1 - 2 - LE SYSTEME INFORMATIQUE

Il est représenté sur la figure I,3. Les informations prélevées sur le système sont traitées par un petit calculateur Hewlett Packard HP 2100 (8 kmots de 16 bits). Le système d'acquisition de données est constitué d'un convertisseur analogique digital (10 bits, temps de conversion 10 μ s -IV/IV), associé à un multiplex 8 voies. Les signaux de commande sont envoyés vers les actionneurs par l'intermédiaire d'un convertisseur digital analogique (8 bits, 2 voies, 0/10 volts).

Remarque : Un enregistreur papier double trace permet d'enregistrer en continu l'évolution de la sortie du système (niveau dans la cuve inférieure) ainsi que l'évolution de la commande (position de la vanne V_e).

I - 2 - ETABLISSEMENT D'UN MODELE MATHEMATIQUE DU PROCESSUS A DEUX CUVES A PARTIR DE CONSIDERATIONS PHYSIQUES⁽²⁾

La forme mathématique du modèle global peut être déterminée à partir de l'expérience, mais également, chaque fois que c'est possible, à partir des équations physiques permettant de décrire le processus. Il est donc très intéressant de pouvoir disposer d'un modèle obtenu à partir de considérations physiques sur le système lui-même.

I - 2 - 1 - HYPOTHESES DE SIMPLIFICATION

Les pertes de charge dues à l'énergie cinétique dans les tuyaux sont proportionnelles à $\frac{V^2}{2g}$, V étant la vitesse de l'eau dans le tuyau et g l'accélération de la pesanteur. Les caractéristiques de la vanne électropneumatique montrent que le débit maximum que l'on peut obtenir est de

$0,18 \text{ m}^3/\text{h}$. Il lui correspond une vitesse maximale V de $0,1 \text{ m/s}$ dans des tuyaux de 25 mm de diamètre. Il semble donc raisonnable de négliger les pertes de charge dues à l'énergie cinétique par rapport aux pertes de charge dues à l'énergie potentielle (provoquées par les différences de niveaux L_1 et L_2 entre le bac à déversoir et les cuves 1 et 2).

Les pertes de charge de frottement dans les tuyaux peuvent également être négligées. En effet, le nombre de Reynolds est de $2\,500$ au maximum pour des tuyaux de 25 mm de diamètre parcourus par de l'eau à la vitesse maximale de $0,1 \text{ m/s}$. Le régime d'écoulement correspondant est alors un régime laminaire ou à la limite, un régime de transition. La longueur d'établissement de tels régimes est de l'ordre de grandeur de la longueur de la conduite, ce qui provoque des pertes de charge de frottement de même ordre de grandeur que les pertes de charge cinétiques.

Les pertes de charge dues à l'accélération de l'eau dans les tuyaux seront négligées ainsi que les variations de pression dans les canalisations introduites par les variations d'ouverture de la vanne d'entrée.

I - 2 - 2 - ETABLISSEMENT DU MODELE

On utilise les notations suivantes :

p_1, p_2	pressions au fond des cuves n° 1, n° 2
p_a	pression atmosphérique
H_1, H_2	hauteurs d'eau dans les cuves n° 1, n° 2
L_b	hauteur d'eau dans le bac à déversoir
L_1	hauteur entre le fond du bac à déversoir et le fond de la cuve n° 1
L_2	hauteur entre le fond de la cuve n° 1 et le fond de la cuve n° 2
ρ	masse volumique de l'eau
g	accélération de la pesanteur
S	section des cuves n° 1 et n° 2
$\emptyset$	diamètre des cuves n° 1 et n° 2

$\Delta H_e, \Delta H_i, \Delta H_s$	pertes de charges dans les vannes électropneumatique (entrée), intermédiaire, de sortie.
D_e, D_i, D_s	débits traversant les vannes électropneumatique, intermédiaire, de sortie.
k_e, k_i, k_s	coefficients caractérisant les vannes électropneumatique, intermédiaire, de sortie.
Y	ouverture de la vanne électropneumatique ($Y = 0$, vanne fermée ; $Y = Y_{\max}$, vanne ouverte complètement).
V_c	tension de commande de la vanne électropneumatique.
V_y	tension proportionnelle à l'ouverture Y de la vanne.
V_{H_2}	tension fonction linéaire de la hauteur H_2 .

Ecrivons les équations relatives aux pressions p_1 et p_2

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = p_a + (L_b + L_1) \rho g - \rho g \Delta H_e \\ p_1 = p_a + H_1 \rho g \end{array} \right. \quad (I;1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_2 = p_1 + L_2 \rho g - \rho g \Delta H_i \\ p_2 = p_a + H_2 \rho g \\ p_2 = p_a + \rho g \Delta H_s \end{array} \right. \quad (I;2)$$

Ecrivons les équations de conservation des débits

$$\left\{ \begin{array}{l} D_e - D_i = H_1' S \\ D_i - D_s = H_2' S \end{array} \right. \quad (I;3)$$

Les pertes de charges peuvent être reliées aux débits par les lois théoriques suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta H_e = \frac{1}{g} \frac{1}{k_e^2} \frac{Y_{\max}^2}{Y^2} D_e^2 \\ \Delta H_i = \frac{1}{g} \frac{1}{k_i^2} D_i^2 \\ \Delta H_s = \frac{1}{g} \frac{1}{k_s^2} D_s^2 \end{array} \right. \quad (I;4)$$

Les équations (I;2), (I;3), (I;4) permettent de déterminer les débits en fonction de deux variables H_1 et H_2 .

$$\begin{cases} D_s = k_s \sqrt{g} \cdot \sqrt{H_2} \\ D_i = k_s \sqrt{g} \cdot \sqrt{H_2} + H_2' S \\ D_e = k_s \sqrt{g} \cdot \sqrt{H_2} + H_2' S + H_1' S \end{cases} \quad (I;5)$$

En résolvant le système par rapport à H_1 et H_2 , on obtient les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} H_1' - \frac{k_e \sqrt{g}}{S} \frac{Y}{Y_{\max}} \sqrt{L_b + L_1 - H_1} + \frac{k_i \sqrt{g}}{S} \sqrt{L_2 + H_1 - H_2} = 0 \\ H_2' + \frac{k_s \sqrt{g}}{S} \sqrt{H_2} - \frac{k_i \sqrt{g}}{S} \sqrt{L_2 + H_1 - H_2} = 0 \end{cases} \quad (I;6)$$

On constate que le système est non linéaire et du 2^e ordre.

Linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement.

Soient (H_{10}, H_{20}, Y_0) un point de fonctionnement et

$$\left. \begin{aligned} \Delta H_1 &= H_1 - H_{10} \\ \Delta H_2 &= H_2 - H_{20} \\ \Delta Y &= Y - Y_0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{les variations autour de ce point de} \\ \text{fonctionnement.} \end{array}$$

Les techniques classiques de linéarisation ⁽³⁾ permettent d'écrire les relations suivantes :

$$\begin{cases} \Delta \dot{H}_1 - a_{11} \Delta H_1 - a_{12} \Delta H_2 = b_{11} \Delta Y \\ \Delta \dot{H}_2 - a_{21} \Delta H_1 - a_{22} \Delta H_2 = b_{21} \Delta Y \end{cases} \quad (I;7)$$

avec

$$\begin{cases} a_{11} = -\frac{k_e}{2S} \frac{Y_0}{Y_{\max}} \sqrt{\frac{g}{L_b + L_1 - H_{10}}} & - a_{12} \\ a_{12} = a_{21} = \frac{k_i}{2S} \sqrt{\frac{g}{L_2 + H_{10} - H_{20}}} \\ a_{22} = -\frac{k_s}{2S} \sqrt{\frac{g}{H_{20}}} & - a_{12} \\ b_{11} = \frac{k_e}{S} \frac{\sqrt{g(L_b + L_1 - H_{10})}}{Y_{\max}} \\ b_{21} = 0 \end{cases} \quad (I;8)$$

Il est donc possible, pour un point de fonctionnement donné, H_{10} , H_{20} , Y_o , de déterminer par le calcul les coefficients a_{ij} et b_{ij} du modèle linéaire susceptible de représenter le système en ce point.

De (I;7) et (I;8) on déduit l'équation différentielle vérifiée par ΔH_2 .

$$\ddot{\Delta H_2} - \dot{\Delta H_2} (a_{11} + a_{22}) - \Delta H_2 (a_{12}^2 - a_{11} a_{22}) = a_{12} b_{11} \Delta Y \quad (I;9)$$

Pour calculer les coefficients a_{ij} , b_{ij} on connaît les paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} L_b + L_1 = 1,284 \text{ m} \\ L_2 = 0,756 \text{ m} \\ \emptyset = 9,2 \text{ cm} \\ g = 9,81 \text{ m/s/s} \end{array} \right.$$

sont inconnus les coefficients k_e , k_i , k_s et le couple (H_{10}, H_{20}) correspondant à Y_o .

Les paramètres k_e , k_i et k_s sont déterminés à partir de l'étude statique. En remplaçant ces valeurs dans les équations (I;8) on obtient les paramètres a_{ij} , b_{ij} du modèle dynamique.

La comparaison de ce modèle avec les modèles qui seront obtenus par d'autres méthodes d'identification permettra de vérifier la validité des hypothèses de simplification qui ont été faites précédemment.

I - 3 - ETUDE STATIQUE DU PROCESSUS HYDRAULIQUE.

I - 3 - 1 - METHODE -

On mesure à l'équilibre les hauteurs d'eau H_1 et H_2 ainsi que le débit de sortie D_s en fonction de la tension de commande V_c de la vanne V_e .

Il faut attendre environ 30 mn après variation de la commande pour qu'une position d'équilibre soit atteinte.

Les hauteurs H_1 et H_2 sont mesurées à l'aide d'une règle graduée avec une précision de 0,5 mm. Le débit D_s est estimé à 10% (principe de la mesure : on chronomètre le temps T nécessaire pour remplir un volume V ; $D_s = \frac{V}{T}$).

I - 3 - 2 - RESULTATS -

a) Une campagne de mesures systématiques a été entreprise pendant plusieurs jours avec et sans le régulateur de la vanne électropneumatique pour étudier la stationnarité du système. On a constaté que les mesures n'étaient pas reproductibles sans régulateur ; car le déplacement de position Y de la vanne V_e en fonction de la tension de commande V_c , à cause des frottements la vanne, prend sans régulateur une position Y qui dépend de son histoire antérieure ; ainsi à V_c donné ne correspond pas une seule position mais une multitude de positions.

Dans toute la suite de l'étude, la vanne sera donc toujours adjointe de son régulateur ; les mesures sont reproductibles pour H_2 à 6 mm sur une journée, à 30 mm sur quatre mois.

Remarque : Le déplacement de la vanne est mesuré par une méthode potentiométrique par l'intermédiaire d'un système à engrenage ; le jeu de cet engrenage est négligeable.

b) Examinons la figure I,5 qui donne les hauteurs H_1 , H_2 et $1/D_s$ en fonction de l'ouverture $Y/Y_{\max}$.

On remarque que H_1 et H_2 sont des fonctions croissantes de $Y/Y_{\max}$ alors que $1/D_s$ est une fonction décroissante. H_1 et H_2 sont approximativement des fonctions linéaires de $\frac{Y}{Y_{\max}}$ pour $V_c > 1,6V$; la cuve n° 1 déborde pour $V_c > 4V$.

c) Le modèle théorique déduit des lois physiques explique-t-il ces courbes ?

D'après ce modèle on a à l'équilibre les relations :

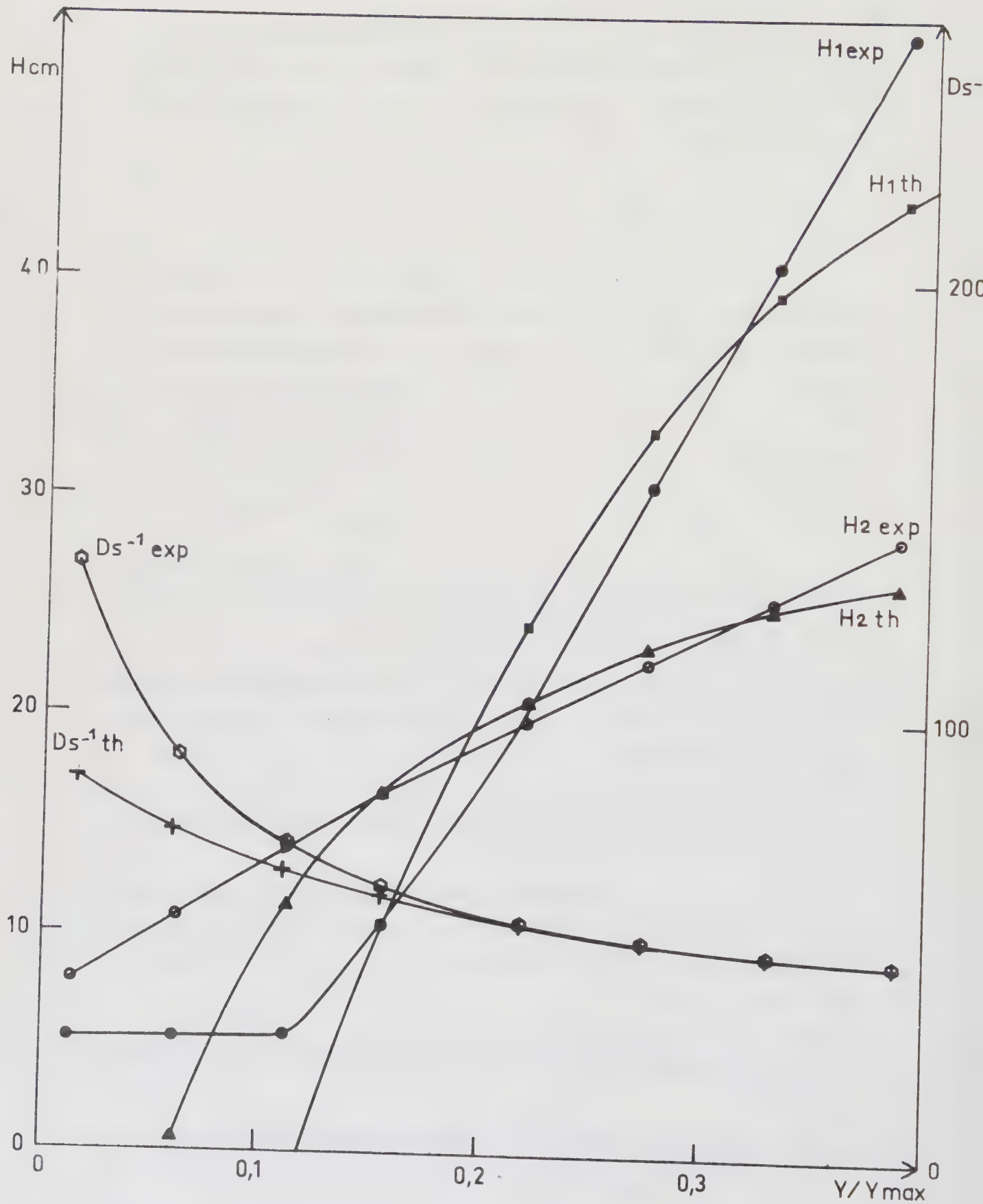


Fig.I,5 - Courbes donnant $H1, H2, Ds^{-1}$ expérimentaux et théoriques en fonction de $Y/Y_{\max}$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_e = k_e \sqrt{g} \frac{Y}{Y_{\max}} (L_b + L_1 - H_1)^{1/2} \\ D_i = k_i \sqrt{g} (L_2 + H_1 - H_2)^{1/2} \\ D_s = k_s \sqrt{g} H_2^{1/2} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (I;10) \\ (I;11) \\ (I;12) \end{array}$$

$$\text{avec } D_e = D_i = D_s \quad (I;13)$$

$$\text{De (I;11), (I;12) , (I;13) on déduit que théoriquement} \\ H_1 = H_2 \left(1 + \left(\frac{k_s}{k_i} \right)^2 \right) - L_2 \quad (I;14)$$

Expérimentalement H_1 est bien une fonction linéaire de H_2 pour $H_2 > 0,14$ m ; on déduit de (I;14) que

$$\frac{k_s}{k_i} \approx 1,6 \quad (I;15)$$

$$L_2 \approx 0,50 \text{ m}$$

De (I;12) on déduit que théoriquement $\log D_s$ est une fonction linéaire de H_2 .

Ceci est bien vérifié aux incertitudes sur D_s près ; on déduit de (I;12) que

$$k_s \approx 1,35 \cdot 10^{-5} \text{ MKS} \quad (I;16)$$

et de (I;15) que

$$k_i \approx 0,841 \cdot 10^{-5} \text{ MKS}$$

De (I;10) on déduit que théoriquement $\left(\frac{D_e}{Y_{\max}} \right)^2$ est une fonction linéaire de H_1 .

Ceci est grossièrement vérifié ; on déduit de (I;10) que

$$\frac{k_e}{k_s} = 3,63$$

et de (I;16) que

$$k_e = 4,88 \cdot 10^{-5} \text{ MKS}$$

$$L_b + L_1 = 0,57 \text{ m}$$

- Comparaison avec le modèle théorique

$$\text{Théoriquement} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_b + L_1 = 1,284 \text{ m} \\ L_2 = 0,756 \text{ m} \end{array} \right.$$

La divergence de l'estimation théorique avec l'estimation expérimentale statique signifie que les pertes de charge dans les tuyaux ne sont pas négligeables.

- L'étude statique a permis d'affiner le modèle théorique ; retenons le modèle suivant donnant H_1 et H_2 (en mètres) en fonction de $Y/Y_{\max}$

$$\left\{ \begin{array}{l} H_1 - 0,225 \cdot 10^{-1} \frac{Y}{Y_{\max}} \sqrt{0,57 - H_1} + 0,388 \cdot 10^{-2} \sqrt{0,50 + H_1 - H_2} = 0 \\ H_2 + 0,622 \cdot 10^{-2} \sqrt{H_2} - 0,388 \cdot 10^{-2} \sqrt{0,50 + H_1 - H_2} = 0 \end{array} \right. \quad (I;17)$$

Si l'on désire un modèle en fonction de $V_C/V_{C \max}$ on a la relation

$$V_C/V_{C \max} = 0,04 + Y/Y_{\max}$$

Le modèle précédent est un modèle grossier qui rend compte du fonctionnement statique pour $1,6 \text{ V} < V_C < 3,6 \text{ V}$ à 10% près comme on s'en rend compte sur la figure I,5.

Pour arriver à un modèle relativement simple on a fait des approximations hardies : en particulier le fonctionnement d'une vanne est beaucoup plus compliqué que l'équation retenue ne le laisse supposer.

- Linéarisons le modèle autour du point de fonctionnement moyen ($H_{10} = 0,274 \text{ m}$, $H_{20} = 0,3065 \text{ m}$; $Y_o/Y_{\max} = 0,225$) pour avoir un

ordre de grandeur du gain statique et des constantes de temps du système.

(I;7) devient

$$\begin{cases} \Delta \dot{H}_1 + 8,549 \cdot 10^{-3} \Delta H_1 - 2,544 \cdot 10^{-3} \Delta H_2 = 1,155 \cdot 10^{-2} \Delta Y/Y_{\max} \\ \Delta \dot{H}_2 - 2,554 \cdot 10^{-3} \Delta H_1 + 9,100 \cdot 10^{-3} \Delta H_2 = 0 \end{cases}$$

ΔH_2 vérifie donc l'équation différentielle suivante :

$$\Delta \dot{H}_2 + \Delta H_2 (1,765 \cdot 10^{-2}) + \Delta H_2 (7,127 \cdot 10^{-5}) = 2,950 \cdot 10^{-5} \Delta Y/Y_{\max}$$

L'équation de transfert moyenne du système est donc :

$$\frac{\Delta V_{H2}(p)}{\Delta V_{C}(p)} = \frac{0,0667}{(1 + 160p)(1 + 87,7p)}$$

L'étude théorique combinée à l'étude statique a montré que dans la zone $1,6 \text{ V} < V_c < 3,6 \text{ V}$ le processus hydraulique peut être représenté par un système linéaire du deuxième ordre.

On va maintenant définir les paramètres de ce modèle par trois techniques d'identification différentes.

- La décomposition de la réponse indicielle en somme d'exponentielles.
- La méthode des moindres carrés améliorée par K. Steiglitz et L.E. Mac Bride.
- L'identification par corrélation de la réponse impulsionnelle et indicielle.

On a choisi ces méthodes car elles sont habituellement employées dans l'identification des processus industriels. La première méthode peut être appliquée de deux manières différentes : à partir des enregistrements continus ou à partir des enregistrements séquentiels. La première manière permet de déterminer la période d'échantillonnage utilisée dans toutes les autres méthodes.

Une étude préliminaire à l'identification dynamique du système excité par des échelons positifs ou négatifs montre que le processus est stationnaire ; sans hystérésis, et sans dérive. Par contre le gain statique est mal défini.

CHAPITRE II

Méthode de la réponse à un échelon ou impulsionnelle
approchée par une somme d'exponentielles.

Dans la première partie de ce chapitre est décrit le principe de la méthode. Cette méthode peut être appliquée de deux manières : graphiquement ou sur calculateur. Ces deux manières donnent dans le domaine de variation de V_C choisi deux fonctions de transfert en p du deuxième ordre presque identiques.

II - 1 - PRINCIPE -

Soit une fonction de transfert d'un système linéaire de la forme :

$$T(p) = \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{p + a_i} \quad a_i, K_i \text{ réels } \forall i ; a_i > 0 \quad \forall i$$

- La réponse d'un tel système supposé au repos à une entrée en échelon unitaire est :

$$\begin{aligned} s(t) &= L^{-1} \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{p + a_i} \right) = L^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \frac{K_i}{a_i} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p + a_i} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{K_i}{a_i} \left(1 - e^{-a_i t} \right) \end{aligned}$$

Inversement supposons que la réponse de ce système à un échelon unitaire soit :

$$s(t) = V_F - \sum_{i=1}^N \alpha_i e^{-\beta_i t} \quad \alpha_i, \beta_i \text{ réels } \forall i, \beta_i > 0 \quad \forall i$$

$T(p)$ sera de la forme

$$T(p) = \left(V_F - \sum_{i=1}^N \frac{p \alpha_i}{p + \beta_i} \right) = \left(V_F - \sum_{i=1}^N \alpha_i - \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i \beta_i}{p + \beta_i} \right)$$

Le système sera identifié correctement si :

$$V_F - \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i = \beta_i \\ K_i = -\alpha_i \beta_i \end{array} \right\} \forall i$$

- La réponse impulsionnelle d'un tel système est de la forme :

$$h(t) = L^{-1} \left(\sum_{i=1}^N \frac{K_i}{p + a_i} \right) = \sum_{i=1}^N K_i e^{-a_i t}$$

Inversement supposons que la réponse impulsionnelle de ce système soit :

$$h(t) = \sum_{i=1}^N \alpha_i e^{-\beta_i t} \quad \alpha_i, \beta_i \text{ réels } \forall i ; \beta_i > 0 \quad \forall i$$

T(p) sera de la forme :

$$T(p) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{p + \beta_i}$$

Le système est identifié correctement :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_i = \beta_i \\ K_i = \alpha_i \end{array} \right\} \forall i$$

Supposons connue la réponse à un échelon ou la réponse impulsionnelle d'un système linéaire d'ordre N dont tous les pôles sont réels négatifs ; il suffit de mettre ces réponses sous forme de somme d'exponentielles pour obtenir une fonction de transfert modèle de ce système.

Dans le cas de la réponse à un échelon la sortie modèle au temps $t = 0$ ne sera nulle que si est remplie la contrainte $V_F = \sum_{i=1}^N \alpha_i$

Un inconvénient de la méthode dans notre cas est que n'est pas prise en compte la valeur de la pente à l'origine de la réponse : en effet d'après les lois de la physique $s'(t=0)=0$, ce qui implique la contrainte $\sum_{i=1}^N \alpha_i \beta_i = 0$, qui n'est pas respectée en général par les valeurs trouvées.

II - 2 - APPROXIMATION D'UNE COURBE PAR UNE SOMME D'EXPONENTIELLES

Supposons connues

- la réponse $s(t)$ d'un processus non oscillant à une entrée en échelon, tendant vers la valeur finale V_F .

ou

- la réponse impulsionnelle d'un processus non oscillant .

Dans le premier cas on pose $y(t) = V_F - s(t)$

Dans le deuxième cas on pose $y(t) = h(t)$

Le problème est d'approcher $y(t)$ par une somme d'exponentielles

$$y(t) \approx \alpha_1 e^{-\beta_1 t} + \alpha_2 e^{-\beta_2 t} + \dots + \alpha_i e^{-\beta_i t} + \dots \text{ avec } \beta_i = \frac{1}{T_i} V_i$$

on suppose $\beta_1 \ll \beta_2 \ll \dots \ll \beta_i \ll \dots$

pour t assez grand

$$y(t) \approx \alpha_1 e^{-\frac{t}{T_1}}$$

$$\text{Log } |y(t)| \approx \text{Log } |\alpha_1| - \frac{t}{T_1}$$

Donc pour t assez grand la courbe $\text{Log } |y(t)|$ est une droite de pente $-\frac{1}{T_1}$ et d'ordonnée à l'origine $\text{Log } |\alpha_1|$

Une fois α_1 et T_1 connus on peut écrire :

$$y(t) = \alpha_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + \alpha_2 e^{-\frac{t}{T_2}} + \dots$$

Pour t assez grand

$$y(t) = \alpha_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + \alpha_2 e^{-\frac{t}{T_2}}$$

$$\text{Log} \left| y(t) - \alpha_1 e^{-\frac{t}{T_1}} \right| = \text{Log} |\alpha_2| - \frac{t}{T_2}$$

Pour t assez grand la courbe $\text{Log} \left| y(t) - \alpha_1 e^{-\frac{t}{T_1}} \right|$ est une droite de pente $-\frac{1}{T_2}$ et d'ordonnée à l'origine $\text{Log} |\alpha_2|$. On peut ainsi par itération trouver tous les couples α_i, T_i .

II - 2 - 1 - APPLICATION GRAPHIQUE

Traçons sur du papier semi logarithmique $y(t)$. Pour t assez grand il est possible de confondre $y(t)$ avec une droite de pente $-\frac{1}{T_1}$ d'ordonnée à l'origine $\text{Log} |\alpha_1|$. Puis on trace sur le même papier la courbe $y(t) - \alpha_1 e^{-\frac{t}{T_1}}$ ce qui détermine α_2 et T_2 .

La méthode est rapide et facile d'application mais peu précise.

- Soit $\Delta y(t)$ l'incertitude de mesure sur $y(t)$; l'incertitude qui en résulte sur le Log est :

$$\Delta \text{Log} |y(t)| = \frac{\Delta y(t)}{y(t)} ; \text{ pour } t \text{ assez grand } y(t) \text{ décroît avec le temps ;}$$

d'autre part $\Delta y(t)$ est presque constant donc $\text{Log} |y(t)|$ croît avec le temps.

Il y a en conséquence un grand choix pour la détermination de la droite si l'on prend la partie de $y(t)$ correspondant à un temps trop grand. Il faut respecter un compromis, choisir une partie de $y(t)$ avec $t_m < t < t_M$ ce qui est facile graphiquement.

- La détermination des couples α_i, T_i est rapidement impossible vu que le nombre de points permettant de tracer les droites diminue rapidement et que la précision sur ces points diminue.

II - 2 - 2 - APPLICATION NUMERIQUE ; (PROGRAMME SUR CII 10070)

Au calcul automatique des constantes $\alpha_1, T_1 ; \alpha_2, T_2$ basé sur la même principe que précédemment, on ajoute une phase d'optimisation.^{(4), (5)}

II - 2 - 2 - 1. Détermination des valeurs approchées d'un couple α_i, T_i

Pour t assez grand $y(t) \approx \alpha_1 e^{-\beta_1 t}$

On trouve α_1 et β_1 en minimisant l'écart quadratique Q entre les deux quantités $\text{Log } |y(t)|$ et $\text{Log } |\alpha_1| - \beta_1 t$

$$Q = \sum_{i=1}^M z_i (\text{Log } |y(t_i)| - \text{Log } |\alpha_1| + \beta_1 t_i)^2 \quad M = \text{nombre de mesures}$$

z_i est le poids attribué à la mesure i ; on prend $z_i = t_i^w$ avec $w > 0$ pour avantager les points éloignés dans le temps par le calcul de la plus grande constante de temps et $w < 0$ pour le calcul de la plus faible constante de temps qui doit être calculée plutôt sur les premiers points.

Remarques - Pour w on a choisi un certain nombre de pondérations différentes qui sont systématiquement essayées ; le programme retient les coefficients correspondant à la pondération qui a donné les meilleurs résultats.

Dans notre cas $N = 2$; soit w_1 et w_2 les pondérations correspondantes aux déterminations de α_1, β_1 et α_2, β_2 ; on choisit les dix combinaisons suivantes pour w_1, w_2 .

Π	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w_1	0	1	2	1	1	1	2	2	2	3
w_2	0,5	1	2	-1,5	-1	-1,5	-0,5	-1	-1,5	-2

$$Q \text{ est extrémum pour } \begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \text{Log}|\alpha_1|} = 0 & \text{ce qui donne} \\ \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - \sum_{i=1}^M 2 z_i (\text{Log}|y(t_i)| - \text{Log}|\alpha_1| + \beta_1 t_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^M 2 z_i t_i (\text{Log}|y(t_i)| - \text{Log}|\alpha_1| + \beta_1 t_i) = 0 \end{cases}$$

La solution du système est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M z_i & - \sum_{i=1}^M z_i t_i \\ \sum_{i=1}^M z_i t_i & - \sum_{i=1}^M z_i t_i^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \text{Log}|\alpha_1| \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M z_i \text{Log}|y(t_i)| \\ \sum_{i=1}^M z_i t_i \text{Log}|y(t_i)| \end{bmatrix}$$

Regardons si cet extremum est un minimum

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Q}{(\partial \text{Log}|\alpha_1|)^2} & \frac{\partial^2 Q}{\partial \text{Log}|\alpha_1| \partial \beta_1} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta_1 \partial \text{Log}|\alpha_1|} & \frac{\partial^2 Q}{(\partial \beta_1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^M 2z_i & - \sum_{i=1}^M 2z_i t_i \\ - \sum_{i=1}^M 2z_i t_i & \sum_{i=1}^M 2z_i t_i^2 \end{pmatrix}$$

le déterminant de cette matrice est :

$$\begin{aligned}
 & 4 \left(\sum_{i=1}^M z_i \sum_{i=1}^M z_i t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^M z_i t_i \right)^2 \right) = \\
 & 4 \left(\sum_{i=1}^M t_i^W \sum_{i=1}^M t_i^W t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^M t_i^W t_i \right)^2 \right) = \\
 & 4 \left(\sum_{i=1}^M t_i^W \sum_{i=1}^M t_i^{W+2} - \left(\sum_{i=1}^M t_i^{W+1} \right)^2 \right) = \\
 & 4 \left(\sum_{\substack{i=1,M \\ j=1,M, j \neq i}} t_i^W t_j^{W+2} - \sum_{\substack{i=1,M \\ j=1,M, j \neq i}} t_i^{W+1} t_j^{W+1} \right) = \\
 & 4 \left(\sum_{\substack{i=1,M \\ j=1,M, j < i}} t_i^W t_j^W (t_i^2 + t_j^2 - 2t_i t_j) \right) = \\
 & 4 \left(\sum_{\substack{i=1,M \\ j=1,M, j < i}} t_i^W t_j^W (t_i - t_j)^2 \right)
 \end{aligned}$$

$t_i^W, t_j^W > 0$ donc le déterminant est positif ; la matrice est définie positive ; l'extremum est bien un minimum.

Une fois α_1 et β_1 trouvés on fait la différence $y(t) - \alpha_1 e^{-\beta_1 t}$ puis on applique à cette différence la même méthode que précédemment et ainsi de suite.

II - 2 - 2 - 2. Amélioration de la valeur des coefficients des exponentielles par une régression non linéaire.

On cherche les α_i, β_i qui rendent minimum l'expression

$$Q = \sum_{j=1}^M \left(\text{Log } |y(t_j)| - \text{Log } \left| \sum_{i=1}^N \alpha_i e^{\beta_i t_j} \right| \right)^2$$

Posons

$$\text{Log } \left| \sum_{i=1}^N \alpha_i e^{\beta_i t_j} \right| = F(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, t_j) \quad \text{avec}$$

$$\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \quad \underline{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_N)$$

Les valeurs $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$ vont être approchées par itérations successives ; supposons connues une approximation de ces valeurs $\underline{\alpha}(p)$ et $\underline{\beta}(p)$ à la $p^{\text{ième}}$ itération.

On linéarise la fonction $F(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, t_j)$ au voisinage de $\underline{\alpha}(p)$, $\underline{\beta}(p)$

$$\begin{aligned} F(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, t_j) &= F(\underline{\alpha}(p), \underline{\beta}(p), t_j) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \alpha_i} (\underline{\alpha}(p), \underline{\beta}(p), t_j) (\alpha_i - \alpha_i(p)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \frac{\partial F}{\partial \beta_i} (\underline{\alpha}(p), \underline{\beta}(p), t_j) (\beta_i - \beta_i(p)) \end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} (\underline{\alpha}(p), \underline{\beta}(p), t_j) = \frac{e^{\beta_1 t_j}}{\sum_{i=1}^N \alpha_i e^{\beta_i t_j}} \\ \frac{\partial F}{\partial \beta_1} (\underline{\alpha}(p), \underline{\beta}(p), t_j) = \frac{\alpha_1 t_j e^{\beta_1 t_j}}{\sum_{i=1}^N \alpha_i e^{\beta_i t_j}} \end{cases}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} F(\underline{\alpha}, \underline{\beta}, t_j) &= F(\underline{\alpha}(p), \underline{\beta}(p), t_j) + \sum_{i=1}^{2N} b_{ij} X_i \quad \text{avec} \\ \begin{cases} X_i = \alpha_i - \alpha_i(p) & \text{pour } 1 \leq i \leq N \\ X_i = \beta_i - \beta_i(p) & \text{pour } N < i \leq 2N \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} (\underline{\alpha}(p), \underline{\beta}(p), t_j) & 1 \leq i \leq N \\ b_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \beta_1} (\underline{\alpha}(p), \underline{\beta}(p), t_j) & N < i \leq 2N \end{cases}$$

Une condition nécessaire pour que

$$Q = \sum_{j=1}^M \left(\underbrace{\text{Log } |y(t_j)| - F(\underline{\alpha}(p), \underline{\beta}(p), t_j)}_{v_j} - \sum_{i=1}^{2N} b_{ij} X_i \right)^2$$

soit minimum est que :

$$\frac{\partial Q}{\partial X_m} = 0 \quad \forall m \quad 1 \leq m \leq 2N \quad \text{c'est à dire}$$

$$2 \sum_{j=1}^M \left(v_j - \sum_{i=1}^{2N} b_{ij} X_i \right) b_{mj} = 0 \quad \forall m \quad 1 \leq m \leq 2N$$

cette condition est équivalente à

$$\sum_{j=1}^M v_j b_{mj} - \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^M b_{mj} b_{ij} X_i = 0 \quad \text{ou encore}$$

$$C_m - \sum_{i=1}^{2N} A_{mi} X_i = 0 \quad \forall m \quad 1 \leq m \leq 2N$$

Cette condition débouche sur la résolution d'un système linéaire d'ordre 2N.

Regardons si la condition nécessaire est suffisante, pour cela examinons la matrice à 2N colonnes et 2N lignes, dont l'élément situé à la $i^{\text{ème}}$ colonne et $j^{\text{ème}}$ ligne est égal à :

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial X_i \partial X_j} = 2 \sum_{r=1}^M b_{ir} b_{jr}$$

Cette matrice est définie positive puisque sa forme quadratique associée est égale à :

$$2 \sum_{j=1}^M (b_{1j} + \dots + b_{2Nj})^2$$

La condition nécessaire est donc suffisante. Il faut toutefois vérifier que la linéarisation était bien justifiée, aussi on compare entre deux itérations successives la somme des racines carrées des différences entre les valeurs observées et les valeurs calculées Q'_p

$$Q'_p = \sum_{j=1}^M (\text{Log}|y(t_j)| - F(\underline{\alpha}(p), \underline{\beta}(p), t_j))^{1/2}$$

Les corrections X_i doivent être telles que $Q'_{p+1} < Q'_p$, sinon elles sont trop grandes, on les divise alors par deux jusqu'à ce que $Q'_{p+1} < Q'_p$.

On estime avoir atteint les bonnes valeurs des α_i, β_i lorsque les taux de correction $\frac{X_i}{\alpha_i}, \frac{X_i}{\beta_i}$ sont inférieurs à 10^{-3} .

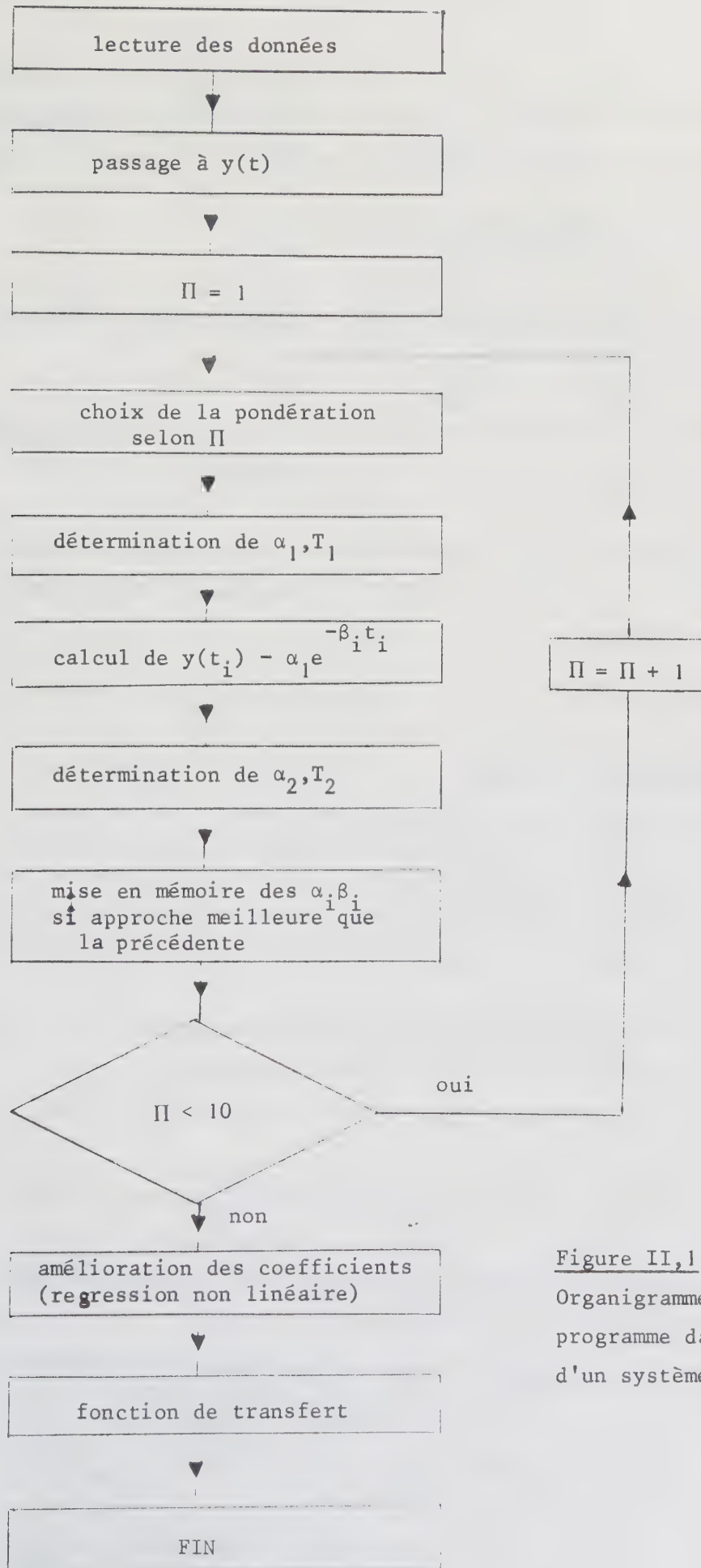


Figure II,1.

Organigramme général du programme dans le cas d'un système d'ordre 2.

II - 3 - APPROCHE DE LA REPONSE A UN ECHELON PAR UNE SOMME D'EXPONENTIELLES

II - 3 - 1 - METHODE GRAPHIQUE

On va tout d'abord appliquer la méthode graphique à la réponse à un échelon de notre processus supposé d'ordre 2.

On relève les réponses autour de quatre points de fonctionnement :
 $(V_c = 2,04 \text{ V} ; 2,55 \text{ V} ; 3,06 \text{ V} ; 3,57 \text{ V})$. Les échelons sont de $0,51 \text{ V}$.

On tient compte de la contrainte $\alpha_1 + \alpha_2 = V_F$ en obligeant la droite approximant $\text{Log } |\alpha_2 e^{-\beta_2 t}|$ à passer par le point de coordonnées:
 $(t=0 ; \text{Log } |V_F - s(t=0) - \alpha_1|)$

Posons $s(t=0) = V_I$

Ainsi $\Delta(\alpha_2) = \Delta|V_I| + \Delta|\alpha_1| + \Delta|V_F|$

La précision sur α_2 dépend de la précision de α_1 mais aussi du choix de la valeur finale V_F et de la valeur initiale V_I ce qui implique que la précision sur le couple (α_2, β_2) est plus faible que celle sur le couple (α_1, β_1) .

$y(t)$ est enregistré sur un enregistreur papier SEFRAM.

La valeur efficace du bruit est environ 4% de la valeur de $V_F - V_I$.

Résultats :

$$\text{pour } V_c = 2,04 \text{ V} \quad (y(t) - V_F) / (V_I - V_F) = \left(1,33 e^{-\frac{t}{296}} - 0,33 e^{-\frac{t}{63,8}} \right)$$

$$V_c = 2,55 \text{ V} \quad (y(t) - V_F) / (V_I - V_F) = \left(1,31 e^{-\frac{t}{287}} - 0,31 e^{-\frac{t}{55,8}} \right)$$

$$V_c = 3,06 \text{ V} \quad (y(t) - V_F) / (V_I - V_F) = \left(1,42 e^{-\frac{t}{256}} - 0,42 e^{-\frac{t}{69,5}} \right)$$

$$V_c = 3,57 \text{ V} \quad (y(t) - V_F) / (V_I - V_F) = \left(1,52 e^{-\frac{t}{246}} - 0,52 e^{-\frac{t}{79,9}} \right)$$

Le système est donc du deuxième ordre ; écrivons $T(p)$

$$V_c = 2,04 \text{ V} \quad T(p) = 0,0843 \frac{1 - 12,8p}{(1 + 296p)(1 + 63,8p)}$$

$$V_c = 2,55 \text{ V} \quad T(p) = 0,0931 \frac{1 - 16,2p}{(1 + 287p)(1 + 55,8p)}$$

$$V_c = 3,06 \text{ V} \quad T(p) = 0,0941 \frac{1 - 9 p}{(1 + 256p)(1 + 69,5p)}$$

$$V_c = 3,57 \text{ V} \quad T(p) = 0,0882 \frac{1 - 3 p}{(1 + 246p)(1 + 79,95p)}$$

On constate la présence d'un terme en p au numérateur qui varie beaucoup ; ce terme ne devrait pas exister d'après le modèle déduit des lois physiques ; sa présence provient du fait que l'on identifie $T(p)$ indirectement ; ce terme en p est égal à $K_1 T_2 - K_2 T_1$;
 $\Delta(K_1 T_2 - K_2 T_1) = |K_1| \Delta T_2 + |K_2| \Delta T_1 + T_2 \Delta |K_1| + T_1 \Delta |K_2|$; comme ΔT_2 , ΔT_1 , $\Delta |K_1|$ et $\Delta |K_2|$ sont assez grands, l'incertitude sur le terme qui apparaît est assez grande et on peut donc considérer qu'il n'a aucune signification physique ; finalement on ne retient de la méthode graphique que le gain statique et les constantes de temps ; on a alors

$$V_c = 2,04 \text{ V} \quad T(p) = 0,0843 \frac{1}{(1 + 296p)(1 + 63,8p)}$$

$$V_c = 2,55 \text{ V} \quad T(p) = 0,0931 \frac{1}{(1 + 287p)(1 + 55,8p)}$$

$$V_c = 3,06 \text{ V} \quad T(p) = 0,0941 \frac{1}{(1 + 256p)(1 + 69,5p)}$$

$$V_c = 3,57 \text{ V} \quad T(p) = 0,0882 \frac{1}{(1 + 246p)(1 + 79,95p)}$$

Vu la précision de la méthode on retient un modèle unique pour les quatre points de fonctionnement ; on déduit ce modèle de la courbe qui est le lissage des réponses indicielles expérimentales pour les quatre points de fonctionnement, ramenées à une même échelle (le gain étant la moyenne des gains précédents) (fig.II,2).

$$T(p) = \frac{0,0899}{(1 + 264p)(1 + 89,8p)}$$

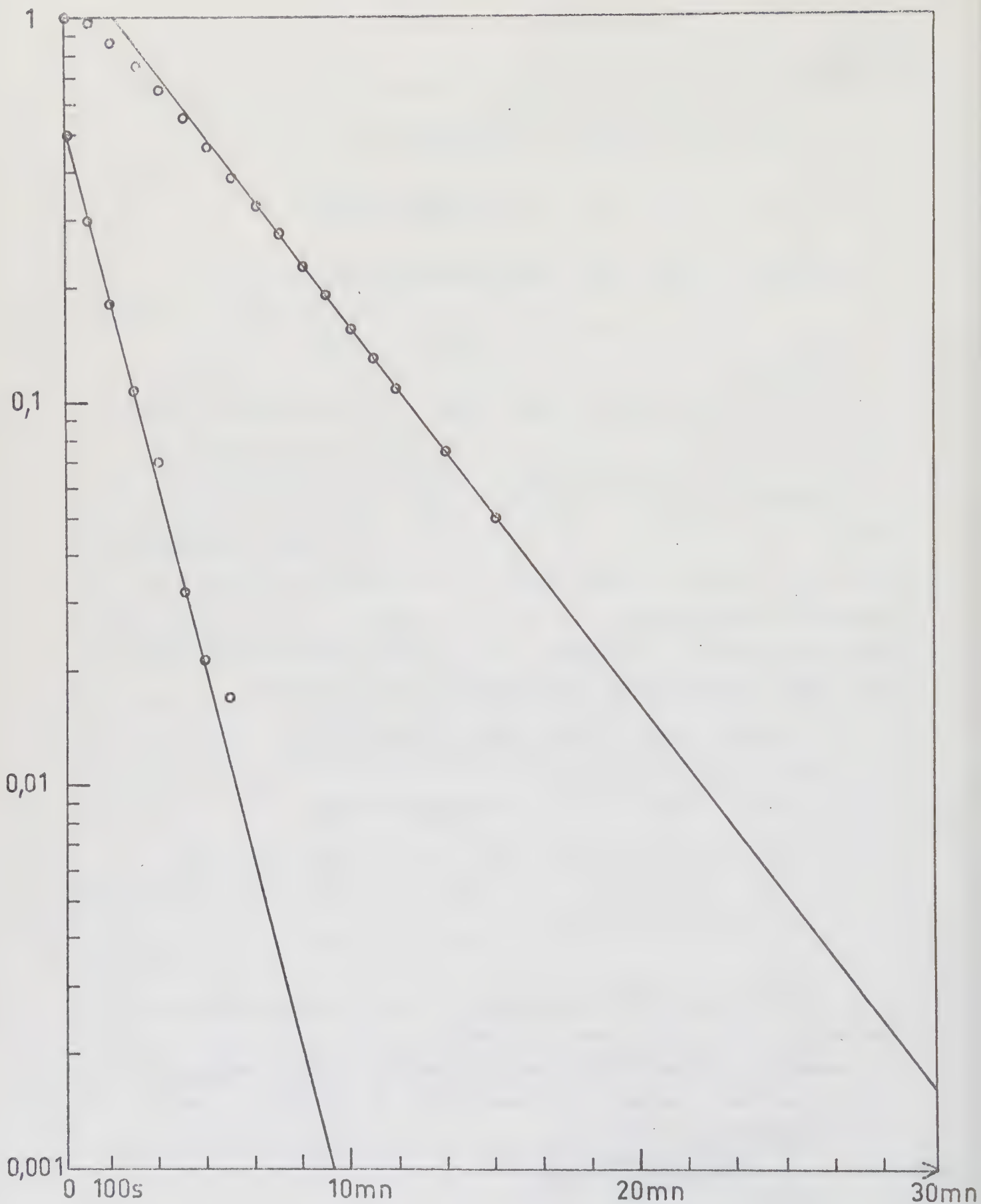


Fig. II, 2 _ Méthode graphique : somme d'exponentielles

On peut comparer sur la fig. II,3 les réponses expérimentales pour $V_c = 2,04 \text{ V}$; $2,55 \text{ V}$; $3,06 \text{ V}$; $3,57 \text{ V}$ et la réponse théorique déduite du modèle précédent.

II - 3 - 2 - METHODE SUR CALCULATEUR

On ne tient pas compte de la contrainte $V_F - \alpha_1 - \alpha_2 = 0$. On supprime le terme $V_F - \alpha_1 - \alpha_2$ qui est très petit comme le montre le calcul de la valeur à l'origine de $s(t)$.

On échantillonne toutes les λ secondes par l'intermédiaire du CAD dont l'intervalle de quantification est approximativement de 2 mV ; vu les constantes de temps trouvées lors de l'identification graphique il suffit de prendre $\lambda = 10$; la valeur efficace du bruit est d'environ 10% de la valeur $V_F - V_I$.

On a d'abord étudié l'influence de la durée de la mesure du signal de sortie sur les paramètres du modèle. Pour ceci on prend des enregistrements de longueur variable (la longueur est exprimée en nombre de points de périodicité 10 s) et on compare chaque fois la sortie du modèle et la sortie réelle à l'aide du critère

$$Q = \left(\sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{M-1} (y_{\text{modèle}}(i\lambda) - y_{\text{objet}}(i\lambda))^2}{M}} \right) \text{UECH}^{-1}$$

L'amplitude de l'échelon $\text{UECH} = 0,51 \text{ V}$; le point de fonctionnement retenu est $V_c = 2,04 \text{ V}$.

La valeur initiale et la valeur finale sont calculées en faisant la moyenne sur 60 points de mesure.

On suppose tout d'abord que le modèle est d'ordre 1 , puis d'ordre 2 .

Les résultats de cette étude sont consignés dans le tableau (II,1).

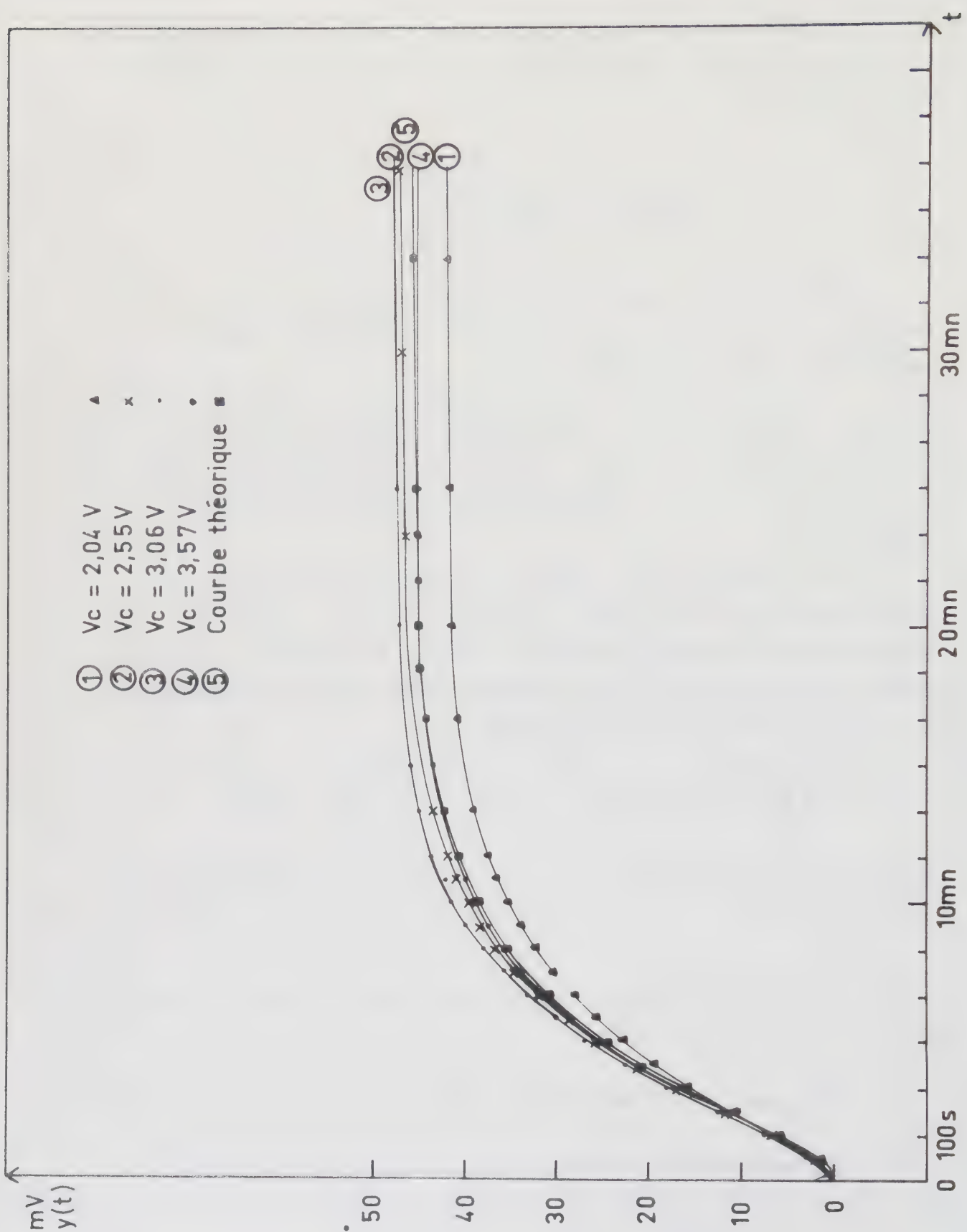


Fig.II, 3 - Courbes expérimentales et théorique (méthode graphique)

TABLEAU (II,1)

ordre 1								
nombre de points de mesure M	17	34	51	68	85	102	119	136
α_1	0,930 E-01	0,941 E-01	1,02 E-01	1,04 E-01	1,06 E-01	1,24 E-01	1,14 E-01	1,29 E-01
β_1	-0,216 E-02	-0,248 E-02	-0,305 E-02	-0,319 E-02	-0,325 E-02	-0,378 E-02	-0,361 E-02	-0,399 E-02
Q	0,657 E-02	0,457 E-02	0,349 E-02	0,355 E-02	0,364 E-02	0,568 E-02	0,444 E-02	0,645 E-02
ordre 2								
α_1	0,930 E-01	0,735 E-01	1,16 E-01	1,16 E-01	1,15 E-01	1,39 E-01	-0,221 E-01	-0,115
β_1	-0,216 E-02	-0,173 E-02	-0,342 E-02	-0,343 E-02	-0,339 E-02	-0,379 E-02	-0,180 E-02	-0,498 E-02
α_2	0	0,163 E-01	-0,245 E-01	-0,273 E-01	-0,255 E-01	-0,471 E-01	0,120	0,209
β_2	0	-0,427 E-02	-0,127 E-01	-0,142 E-01	-0,145 E-01	-0,870 E-02	-0,271 E-02	-0,379 E-02
Q	0,657 E-02	0,775 E-02	0,318 E-02	0,318 E-02	0,318 E-02	0,321 E-02	0,337 E-02	0,325 E-02

On constate tout d'abord que le critère Q est plus faible pour un modèle d'ordre 2 que d'ordre 1 ; ceci confirme notre syppothèse que le processus hydraulique est d'ordre 2.

Examinons les résultats pour un modèle d'ordre 2. On constate que lorsque M est trop faible les paramètres du modèle varient énormément entre deux expériences voisines ($M = 17$ et $M = 34$) et le critère Q garde une valeur élevée.

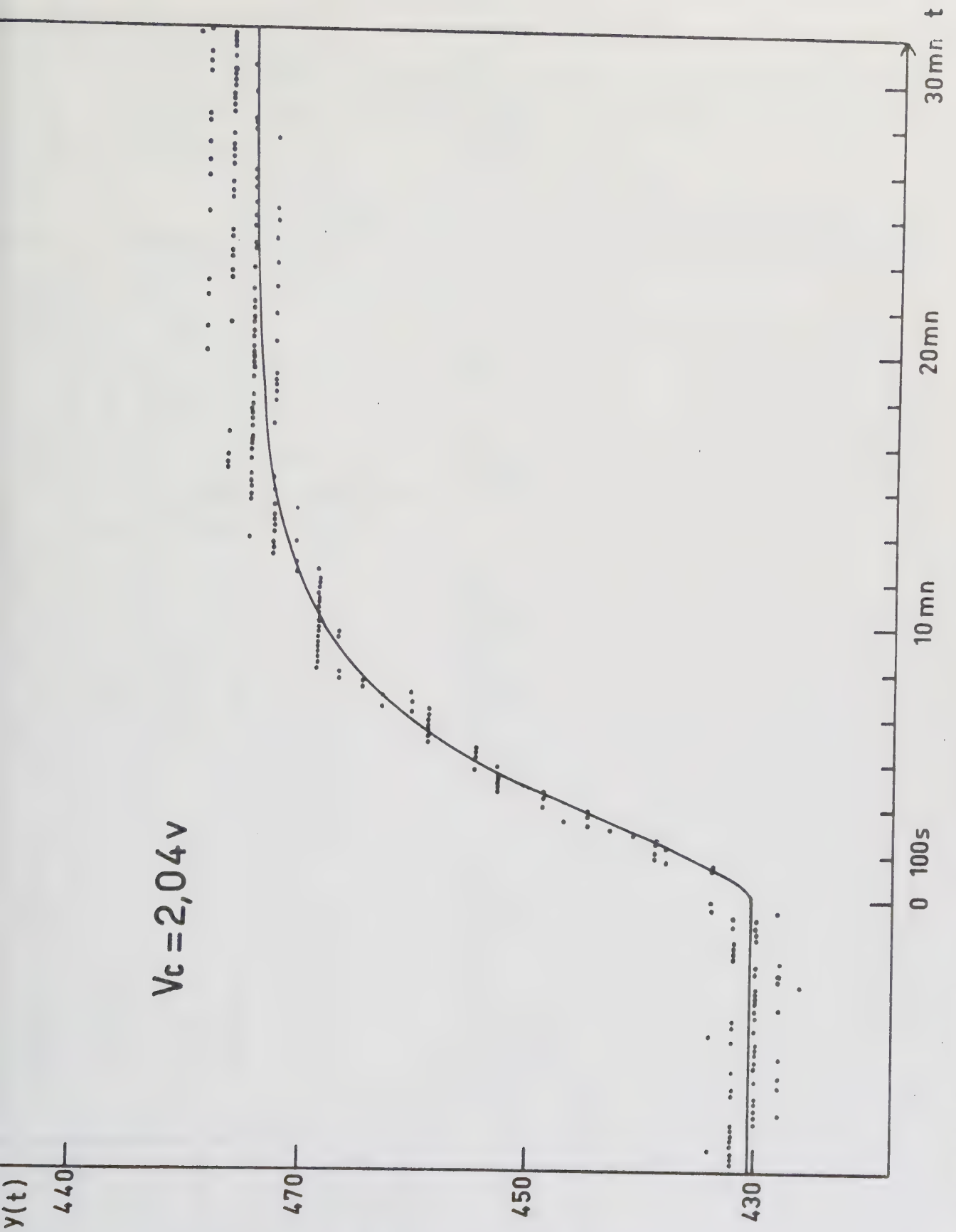
Lorsque M est trop grand, les derniers points représentent l'équilibre et apportent peu d'information sur la plus grande constante de temps. La première partie du programme (voir organigramme) fournit dans ce cas un jeu de paramètres loin de la réalité et entraîne de nombreuses régressions linéaires pour arriver aux paramètres exacts.

En conclusion dans notre cas les meilleurs résultats sont obtenus pour une durée de mesure sur la sortie comprise entre 50 et 100 points soit entre 2 et 4 fois la plus grande constante de temps du processus ; dans ce cas le critère Q est faible comme on peut le constater sur la figure II,4.

Mais le fait que Q soit faible n'implique pas que l'on ait identifié les bons paramètres ; on peut constater la dispersion qui existe sur les 4 jeux de paramètres trouvés pour $M = 51, 68, 85, 102$ pour une valeur de Q sensiblement constante.

On va maintenant identifier le système pour les quatre points de fonctionnement suivants ($V_c = 2,04 \text{ V} ; 2,55 \text{ V} ; 3,06 \text{ V} ; 3,57 \text{ V}$) les mêmes que dans l'étude graphique ; on prendra successivement 51 et 85 points pour avoir une idée de la dispersion des paramètres.

Les résultats de ces identifications sont consignés dans le tableau (II,2).



FigII, 4 - Courbes expérimentale et théorique (méthode sur ordinateur)

TABLEAU (II,2)

Nombre de points de mesure N = 51					
V_C	2,04 V	2,55 V	3,06 V	3,57 V	
α_1	0,116	0,110	0,138	0,197	
β_1	- 0,342 E-02	- 0,343 E-02	- 0,425 E-02	- 0,536 E-02	
α_2	- 0,245 E-01	- 0,164 E-01	- 0,498 E-01	- 0,118	
β_2	- 0,127 E-01	- 0,121 E-01	- 0,124 E-01	- 0,797 E-02	
$T(p)$	$\frac{0,913 \text{ E-01} + 1,96 \text{ p}}{1 + 371\text{p} + 0,231 \text{ E+05p}^2}$	$\frac{0,937 \text{ E-01} + 4,30 \text{ p}}{1 + 374\text{p} + 0,240 \text{ E+05p}^2}$	$\frac{0,884 \text{ E-01} - 0,573 \text{ p}}{1 + 316\text{p} + 0,190 \text{ E+05p}^2}$	$\frac{0,795 \text{ E-01} + 2,77 \text{ p}}{1 + 312\text{p} + 0,234 \text{ E+05p}^2}$	
Nombre de points de mesure M = 85					
α_1	0,115	0,140	0,111	0,980 E-01	
β_1	- 0,339 E-02	- 0,404 E-02	- 0,356 E-02	- 0,400 E-02	
α_2	- 0,255 E-01	- 0,401 E-01	- 0,257 E-01	- 0,180 E-01	
β_2	- 0,145 E-01	- 0,845 E-02	- 0,246 E-01	- 0,112 E-01	
$T(p)$	$\frac{0,893 \text{ E-01} + 0,426 \text{ p}}{1 + 363\text{p} + 0,203 \text{ E+05 p}^2}$	$\frac{0,944 \text{ E-01} + 5,23 \text{ p}}{1 + 366\text{p} + 0,293 \text{ E+05 p}^2}$	$\frac{0,851 \text{ E-01} - 2,72 \text{ p}}{1 + 322\text{p} + 0,114 \text{ E+05 p}^2}$	$\frac{0,800 \text{ E-01} + 4,29 \text{ p}}{1 + 399\text{p} + 0,223 \text{ E+05 p}^2}$	

On constate comme dans le cas de la méthode graphique, l'apparition d'un terme en p au numérateur qui n'a pas de signification physique.

Il ne se dégage pas de loi de variation des paramètres en fonction des points de fonctionnement aussi on retient un modèle moyen unique obtenu en faisant la moyenne des paramètres.

$$T(p) = \frac{0,0877}{(1 + 260p) (1 + 85,5p)}$$

Ce modèle est très proche de celui obtenu graphiquement ; malgré le bruit les deux méthodes donnent des résultats convergents.

CHAPITRE III

Méthode des moindres carrés améliorée par K. Steiglitz et L.E. MAC BRIDE

Le but de la méthode est d'obtenir un modèle en z à partir de l'échantillonnage de l'entrée et de la sortie d'un système linéaire. Mais la méthode des moindres carrés est biaisée aussi utilise-t-on l'algorithme donné par K. STEIGLITZ et L.E. MAC BRIDE. On a choisi comme excitation un signal binaire pseudoaléatoire (voir annexe), qui constitue de toute façon un "bon" signal d'excitation, et dont les propriétés intrinsèques sont utilisées dans le chapitre IV de ce mémoire lors de l'identification par corrélation.

On étudie la précision de la méthode en présence de bruit blanc gaussien sur un modèle en z d'ordre 2. Ensuite on applique cette méthode à l'identification du processus hydraulique.

III - 1 - METHODE DES MOINDRES CARRES SIMPLE - ^{(6), (7), (8)}

Soit le système suivant :

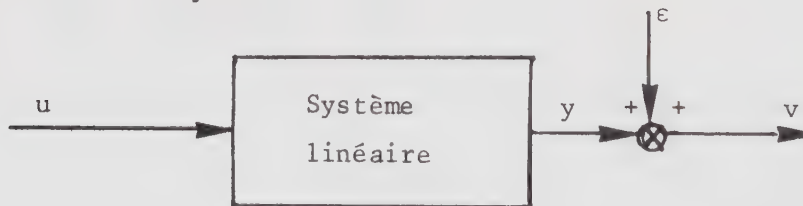


Fig. III,1

u est parfaitement connu à chaque instant k λ : $u(k)$
 v est mesuré à chaque instant k λ : $v(k)$
 ϵ est une perturbation à l'instant k λ : $\epsilon(k)$

On suppose que $v(k) = y(k) + \varepsilon(k)$

D'autre part on suppose que le système linéaire est représenté par l'équation aux différences finies suivante :

$$y(k) + \sum_{i=1}^1 b_i y(k-i) = \sum_{i=1}^t a_i u(k-i) \quad \text{avec } t \leq 1$$

qui dans la représentation en z se met sous la forme :

$$Y(z) B(z) = A(z) U(z) \quad \text{avec}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_t z^{-t} \\ B(z) = b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_1 z^{-1} \quad \text{avec } b_0 = 1 \\ U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(nT) z^{-n} \\ Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y(nT) z^{-n} \end{array} \right.$$

Ecrivons l'équation aux différences finies entre l'entrée et la sortie :

$$v(k) + \sum_{i=1}^1 b_i v(k-i) = \sum_{i=1}^t a_i u(k-i) + \sum_{i=0}^1 b_i \varepsilon(k-i)$$

On appelle résidu $\sum_{i=0}^1 b_i \varepsilon(k-i) = e(k)$

L'équation précédente dans la représentation en z se met sous la forme :

$$V(z) B(z) = A(z) U(z) + B(z) \varepsilon(z) \quad \text{avec}$$

$$\begin{aligned} V(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} v(nT) z^{-n} \\ \varepsilon(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(nT) z^{-n} \end{aligned}$$

$$B(z) \varepsilon(z) = e(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e(nT) z^{-n}$$

Supposons que les mesures commencent à l'instant $t = \alpha$ et se terminent à l'instant $t = \alpha + m$; on peut écrire le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(\alpha) = \sum_{i=1}^t a_i u(\alpha - i) - \sum_{i=1}^1 b_i v(\alpha - i) + e(\alpha) \\ v(\alpha + m) = \sum_{i=1}^t a_i u(\alpha + m - i) - \sum_{i=1}^1 b_i v(\alpha + m - i) + e(\alpha + m) \end{array} \right.$$

ou encore

$$\underline{b} = \phi \underline{x} + \underline{e} \quad \text{avec}$$

$$\underline{b}^T = (v(\alpha), v(\alpha + 1), \dots, v(\alpha + m))$$

$$\underline{x}^T = (a_1, a_2, \dots, a_t, b_1, b_2, \dots, b_1)$$

$$\underline{e}^T = (e(\alpha), e(\alpha + 1), \dots, e(\alpha + m))$$

$$\phi = \begin{pmatrix} u(\alpha - 1) & u(\alpha - 2) \text{ --- } u(\alpha - t) & -v(\alpha - 1) \text{ --- } -v(\alpha - 1) \\ u(\alpha) & u(\alpha - 1) \text{ --- } u(\alpha - t + 1) & -v(\alpha) \text{ --- } -v(\alpha - 1 + 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u(\alpha + m - 1) & u(\alpha + m - 2) \text{ --- } u(\alpha + m - t) & -v(\alpha + m - 1) \text{ --- } -v(\alpha - 1 + m) \end{pmatrix}$$

$$\phi = \left(\underline{U}(\alpha - 1), \underline{U}(\alpha - 2), \dots, \underline{U}(\alpha - t), -\underline{V}(\alpha - 1), \dots, -\underline{V}(\alpha - 1) \right)$$

$$\text{avec} \quad \underline{U}^T(K) = (u(K), u(K + 1), \dots, u(K + m))$$

$$\underline{V}^T(K) = (v(K), v(K + 1), \dots, v(K + m))$$

On essaie de trouver un modèle du système linéaire, c'est à dire de trouver une valeur de $\hat{x}$ très proche de x sachant que l'on a

$$\underline{b} = \phi \underline{x} + \underline{e}$$

$\underline{b}$ est un vecteur mesuré de dimension $m + 1$; ϕ est une matrice mesurée de dimension $(m + 1) \cdot (t + 1)$; $\underline{e}$ est un vecteur stochastique de dimension $m + 1$. Le nombre de mesures est $m + 1$. $\underline{x}$ est un vecteur de dimension $t + 1$ que l'on cherche à connaître.

Posons $t + 1 = N$; $m + 1 = M$

Choisissons M le nombre de mesures à prendre.

Il est simple de prendre $M = N$ et de supposer $\underline{b} = \phi \hat{\underline{x}}$; $\hat{\underline{x}}$ valeur approchée de $\underline{x}$: en effet on a alors à résoudre un système d'ordre M ; mais la matrice ϕ est pauvrement définie, c'est-à-dire qu'une très faible variation sur ϕ ou $\underline{b}$ entraîne une grande variation sur $\hat{\underline{x}}$; $\hat{\underline{x}}$ trouvé de cette manière a une valeur très éloignée de $\underline{x}$ réel ; on a donc intérêt à prendre beaucoup plus de mesures que d'inconnues et employer une méthode qui par un effet de moyenne sur les mesures donne une bonne valeur approchée de $\underline{x}$ qu'on appellera estimateur de $\underline{x}$.

Choix d'un estimateur : prenons celui qui minimise la forme quadratique $Q(\hat{\underline{x}}) = (\underline{b} - \phi \hat{\underline{x}})^T (\underline{b} - \phi \hat{\underline{x}})$
Une condition nécessaire pour que $Q(\hat{\underline{x}})$ soit minimum par rapport à $\hat{\underline{x}}$ est que :

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\underline{x}}}(\hat{\underline{x}}) = -2 \phi^T \underline{b} + 2 \phi^T \phi \hat{\underline{x}} = 0$$

donc
$$\boxed{\hat{\underline{x}} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T \underline{b}}$$
 posons $\hat{\underline{x}}^T = (x_1, \dots, x_{t+1})$

Cet extremum est bien un minimum : la matrice d'élément

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x_i \partial x_j} = 2 \phi^T \phi \text{ est définie positive.}$$

L'estimateur $\hat{x}$ trouvé est linéaire par rapport aux observations b .
Une propriété souhaitable pour un estimateur est d'être tel que $E(\hat{x}) = x$.

Regardons si l'estimateur trouvé est sans biais ?⁽⁹⁾

On suppose que ϵ provient d'un bruit blanc filtré linéairement :

$$\epsilon(k) + \sum_{i=1}^h d_i \epsilon(k-i) = \sum_{i=0}^f c_i \xi(k-i) \quad \text{avec } f \leq h \quad \text{et } c_0 = 1$$

D'autre part on suppose que ξ est un bruit blanc de moyenne nulle et de variance finie σ^2 .

$$\text{Lorsque } \begin{cases} d_i = 0 & \forall i \\ c_i = 0 & \forall i \neq 0 \end{cases} \quad \text{alors } \epsilon(k) \text{ est blanc}$$

Dans la représentation en z l'équation précédente se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \epsilon(z) D(z) &= C(z) \Xi(z) \quad \text{avec :} \\ \left\{ \begin{aligned} D(z) &= d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_h z^{-h} \\ C(z) &= c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_f z^{-f} \\ \epsilon(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon(nT) z^{-n} \\ \Xi(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \xi(nT) z^{-n} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Exprimons les résidus $e(k)$ en fonction de

$$E(z) = B(z) \epsilon(z) = \frac{B(z) C(z) \Xi(z)}{D(z)} = W(z) \Xi(z)$$

$$\text{avec} \quad W(z) = B(z) C(z) D^{-1}(z)$$

$$\text{donc} \quad e(K) = \sum_{r=0}^{\infty} W_r^* \xi(K-r) \quad \text{avec } W_0^* = 1$$

Calculons $E(\hat{\underline{x}}) - \underline{x}$

$$(\phi^T \phi) \hat{\underline{x}} = \phi^T \underline{b} = \phi^T (\phi \underline{x} + \underline{e}) = \phi^T \phi \underline{x} + \phi^T \underline{e} \quad \text{donc}$$

$$(\phi^T \phi) (\hat{\underline{x}} - \underline{x}) = \phi^T \underline{e} \quad (\text{III} ; 1)$$

on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi^T \phi = E(\phi^T \phi) + \Delta(\phi^T \phi) \\ \hat{\underline{x}} - \underline{x} = E(\hat{\underline{x}} - \underline{x}) + \Delta(\hat{\underline{x}} - \underline{x}) \\ \phi^T \underline{e} = E(\phi^T \underline{e}) + \Delta(\phi^T \underline{e}) \end{array} \right.$$

(III;1) devient

$$(E(\phi^T \phi) + \Delta(\phi^T \phi)) (E(\hat{\underline{x}} - \underline{x}) + \Delta(\hat{\underline{x}} - \underline{x})) = E(\phi^T \underline{e}) + \Delta(\phi^T \underline{e})$$

soit :

$$E(\phi^T \phi) E(\hat{\underline{x}} - \underline{x}) + \Delta(\phi^T \phi) E(\hat{\underline{x}} - \underline{x}) + E(\phi^T \phi) \Delta(\hat{\underline{x}} - \underline{x}) + \Delta(\phi^T \phi) \Delta(\hat{\underline{x}} - \underline{x}) = E(\phi^T \underline{e}) + \Delta(\phi^T \underline{e})$$

prenons l'espérance des deux membres de l'égalité :

$$E(\phi^T \phi) E(\hat{\underline{x}} - \underline{x}) + E(\Delta(\phi^T \phi) \Delta(\hat{\underline{x}} - \underline{x})) = E(\phi^T \underline{e})$$

puisque par définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} E(\Delta(\phi^T \phi)) = 0 \\ E(\Delta(\hat{\underline{x}} - \underline{x})) = 0 \\ E(\Delta(\phi^T \underline{e})) = 0 \end{array} \right.$$

Le terme $E(\Delta(\phi^T \phi) \Delta(\hat{x} - x))$ est supposé petit devant les autres termes donc :

$$E(\phi^T \phi) E(\hat{x} - x) = E(\phi^T \underline{e})$$

le biais sera donc nul si $E(\phi^T \underline{e})$ l'est.

$$E(\phi^T \underline{e}) = E \left\{ \begin{array}{cc} u(\alpha - 1) & u(\alpha) - u(\alpha+m-1) \\ u(\alpha - 2) & u(\alpha-1) - u(\alpha+m-2) \\ \vdots & \vdots \\ u(\alpha - t) & u(\alpha-t+1) - u(\alpha+m-t) \\ -v(\alpha - 1) & -v(\alpha) - -v(\alpha+m-1) \\ -v(\alpha - 2) & -v(\alpha-1) - -v(\alpha+m-2) \\ \vdots & \vdots \\ -v(\alpha - 1) & -v(\alpha+1-1) - -v(\alpha+m-1) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \sum_{r=0}^{\infty} W_r^* \xi_{\alpha-r} \\ \sum_{r=0}^{\infty} W_r^* \xi_{\alpha+1-r} \\ \vdots \\ \sum_{r=0}^{\infty} W_r^* \xi_{\alpha+m-r} \end{array} \right\}$$

$$= E \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^m u(\alpha + j - 1) \sum_{r=0}^{\infty} W_r^* \xi_{\alpha-r+j} \\ \sum_{j=0}^m u(\alpha + j - 2) \sum_{r=0}^{\infty} W_r^* \xi_{\alpha-r+j} \\ \sum_{j=0}^m u(\alpha + j - t) \sum_{r=0}^{\infty} W_r^* \xi_{\alpha-r+j} \\ - \sum_{j=0}^m v(\alpha + j - 1) \sum_{r=0}^{\infty} W_r^* \xi_{\alpha-r+j} \\ - \sum_{j=0}^m v(\alpha + j - 1) \sum_{r=0}^{\infty} W_r^* \xi_{\alpha-r+j} \end{array} \right\} =$$

$$E \left\{ \begin{array}{l} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m u(\alpha + j - 1) W_r^* \xi_{\alpha-r+j} \\ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m u(\alpha + j - t) W_r^* \xi_{\alpha-r+j} \\ - \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m v(\alpha + j - 1) W_r^* \xi_{\alpha-r+j} \\ - \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^m v(\alpha + j - 1) W_r^* \xi_{\alpha-r+j} \end{array} \right\}$$

u et ξ sont indépendants donc les t premières lignes sont nulles. Dans les l dernières lignes interviennent les produits entre v et ξ ; v(k) est corrélé seulement à $\xi(k')$ avec $k' \leq k$; donc un certain nombre de termes disparaît ; il reste des termes de la forme :

$$E \left(v(\alpha - i) \sum_{r=i}^{\infty} W_r^* \xi_{\alpha-r} \right) = E \left(\varepsilon(\alpha - i) \sum_{r=i}^{\infty} W_r^* \xi_{\alpha-r} \right) \text{ puisque}$$

$$v(\alpha - i) = y(\alpha - i) + \varepsilon(\alpha - i)$$

On sait que

$$\sum_{i=0}^1 b_i \varepsilon(K - i) = \sum_{r=0}^{\infty} W_r^* \xi(K - r) \quad \text{avec } b_0 = 1$$

$$\varepsilon(K) = \sum_{r=0}^{\infty} W_r^* \xi(K - r) - \sum_{i=1}^1 b_i \varepsilon(K - i)$$

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} E \left(\sum_{j=0}^m \varepsilon(\alpha + j - 1) \xi_{\alpha+j-1} \right) = (m+1) \sigma^2 \\ E \left(\sum_{j=0}^m \varepsilon(\alpha + j - 1) \xi_{\alpha+j-2} \right) = (m+1) (W_1^* - b_1) \sigma^2 \quad \text{etc} \end{array} \right.$$

donc :

$$E(\phi^T \underline{e}) = - (m+1) \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ W_1^* \sigma^2 + W_2^* (W_1^* - b_1) \sigma^2 + \dots \\ \vdots \\ W_1^* \sigma^2 + \end{array} \right)$$

donc $E(\phi^T \underline{e}) = 0$ si $W_i^* = 0$ pour $i \neq 0$

Une condition suffisante pour que l'estimateur soit sans biais est que les résidus $\{e\}$ ne soient pas corrélés entre eux.

En général cela n'est pas car $B(Z) C(Z) \neq D(Z)$.

La méthode des moindres carrés simple est biaisée comme on l'a constaté expérimentalement si les résidus sont corrélés. Mais elle est d'emploi facile.

J. DURBIN ⁽¹⁰⁾ a montré que la matrice de variance de $\hat{\underline{x}}$

$$E((\hat{\underline{x}} - \underline{x}) (\hat{\underline{x}} - \underline{x})^T) = E \left((\phi^T \phi)^{-1} \phi^T e e^T \phi (\phi^T \phi)^{-1} \right)$$

se réduit approximativement à $\sigma'^2 (\phi^T \phi)^{-1}$ si $\underline{e} \underline{e}^T = \sigma'^2 I$

I matrice unité ; un estimateur non biaisé de σ'^2 est égal à

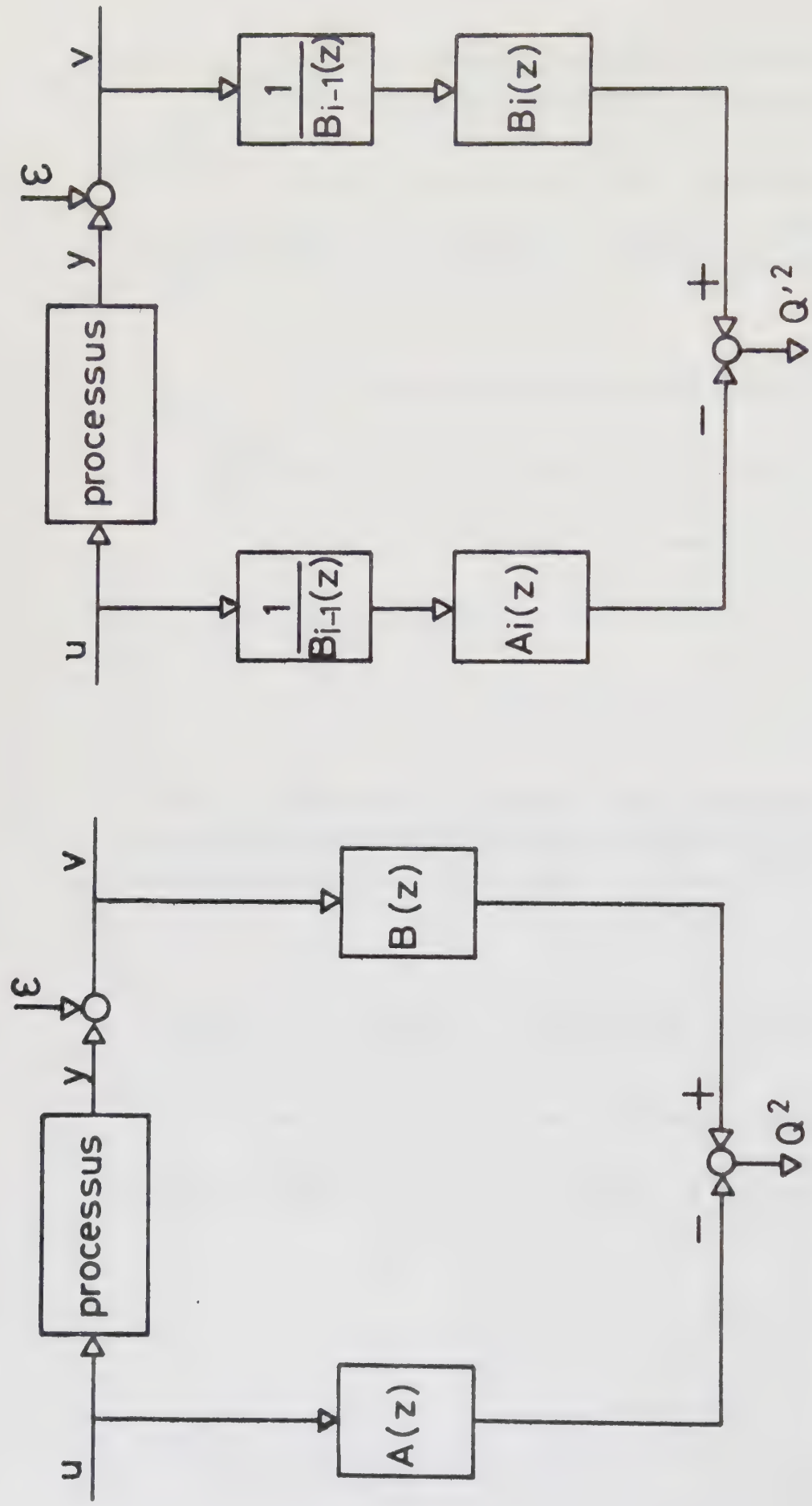
$$\frac{1}{M - N} (\underline{b} - \phi \hat{\underline{x}})^T (\underline{b} - \phi \hat{\underline{x}})$$

La méthode des moindres carrés donne donc une estimation de $\underline{x}$ plus l'incertitude sur l'estimation quand les résidus ne sont pas corrélés ; aussi allons-nous employer une méthode dont le but est de décorréliser les résidus.

III - 2 - METHODE DE K. STEIGLITZ et L.E. MAC BRIDE - (fig.III,2)

Dans la méthode des moindres carrés on optimalise

$$\sum_{i=\alpha}^{\alpha+m} \left(v(i) + \sum_{j=1}^1 b_j v(i-j) - \sum_{j=1}^t a_j u(i-j) \right)^2 = Q^2$$



Méthode des moindres carrés
Methode de K.Steiglitz
et L.E.Mac Bride

Fig. III,2

K. STEIGLITZ et L.E. MAC BRIDE⁽¹¹⁾ proposent une méthode qui asymptotiquement optimalise

$$\sum_{i=\alpha}^{\alpha+m} (v(i) - v_M(i))^2 = Q'^2$$

avec $v_M(z) = A(z) B^{-1}(z) U(z)$

supposons que $\alpha = 0$ et que le système est à l'équilibre pour $t < 0$ alors Q'^2 peut s'écrire quand $N \rightarrow \infty$ ⁽¹²⁾.

$$Q'^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} (B(z) V(z) - A(z) U(z)) (B(z^{-1}) V(z^{-1}) - A(z^{-1}) U(z^{-1})) z^{-1} dz$$

Γ cercle unité.
et Q'^2

$$Q'^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} (V(z) - A(z) B^{-1}(z) U(z)) (V(z^{-1}) - A(z^{-1}) B^{-1}(z^{-1}) U(z^{-1})) z^{-1} dz$$

On emploie tout d'abord la méthode des moindres carrés qui donne une première estimation $A_1(z)$ et $B_1(z)$ puis on filtre l'entrée et la sortie par un filtre $B^{-1}(z)$, puis on applique la méthode des moindres carrés sur cette entrée et sortie filtrée et ainsi de suite. On optimalise donc :

$$Q''^2 = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \left(\frac{\hat{B}_i(z) V(z)}{B_{i-1}(z)} - \frac{A_i(z)}{B_{i-1}(z)} U(z) \right) \left(\frac{B_i(z^{-1}) V(z^{-1})}{B_{i-1}(z^{-1})} - \frac{A_i(z^{-1})}{B_{i-1}(z^{-1})} U(z^{-1}) \right) z^{-1} dz$$

Si $B_i(z)$ proche de $B_{i-1}(z)$ et $A_i(z)$ proche de $A(z)$ on optimalise bien

$$Q''^2 = Q'^2$$

A la convergence $\hat{x}$ peut s'écrire :

$$\hat{x} = (\phi_1^T \phi_1)^{-1} \phi_1^T \underline{b}^*$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} u \text{ filtré} = u^* ; v \text{ filtré} = v^* \\ \underline{b}^{*T} = (v^*(\alpha), v^*(\alpha + 1), \dots, v^*(\alpha + m)) \end{array} \right.$

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} u^*(\alpha-1) & \cdots & u^*(\alpha-t) & -v^*(\alpha-1) & \cdots & -v^*(\alpha-1) \\ u^*(\alpha) & \cdots & u^*(\alpha-t+1) & -v^*(\alpha) & \cdots & -v^*(\alpha-1+1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u^*(\alpha+m-1) & \cdots & u^*(\alpha+m-t) & -v^*(\alpha+m-1) & \cdots & -v^*(\alpha-1+m) \end{pmatrix}$$

La formule précédente est analogue à celle des moindres carrés

$$\hat{x} = (\phi^T \phi)^{-1} \phi^T b$$

On obtient la matrice ϕ_1 à partir de ϕ en remplaçant les t premières colonnes $(\underline{u}(\alpha), \dots, \underline{u}(\alpha-t))$ par $(\underline{u}^*(\alpha), \dots, \underline{u}^*(\alpha-t))$ et les l dernières colonnes $(-\underline{v}(\alpha), \dots, -\underline{v}(\alpha-1))$ par $(-\underline{v}^*(\alpha), \dots, -\underline{v}^*(\alpha-1))$.

Regardons si l'estimateur employé est biaisé.

L'équation

$$\begin{aligned} \underline{b} &= \phi \underline{x} + \underline{e} \quad \text{est transformée en} \\ \underline{b}^* &= \phi^* \underline{x} + \underline{e}^* \quad \text{avec} \\ e^*(z) &= \frac{E(z)}{B(z)} = \varepsilon(z) \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour que la méthode ne soit pas biaisée est que les quantités ε ne soient pas corrélées entre elles (on a aussi fait l'hypothèse que ε était un bruit de moyenne nulle mais il est facile de se ramener à un bruit centré par l'adjonction d'un paramètre supplémentaire dans l'équation du modèle dans le cas contraire).

La méthode de K. Steiglitz et L.E. Mac Bride ne donnera de bons résultats que si ε est un bruit blanc. Cette méthode a un sens beaucoup plus physique que celle des moindres carrés.

III - 3 - IDENTIFICATION PAR LA METHODE DES MOINDRES CARRES SIMPLE ET CELLE AMELIOREE PAR K. STEIGLITZ ET L.E. MAC BRIDE.

L'application de la méthode approche d'une réponse indicielle par une somme d'exponentielles a montré que, le processus était bien représenté par une fonction de transfert du type

$$T(p) = \frac{K}{(p + a)(p + b)}$$

Aussi retient-on le modèle en z correspondant.

III - 3 - 1 - CHOIX DU MODELE EN z

On a le système suivant

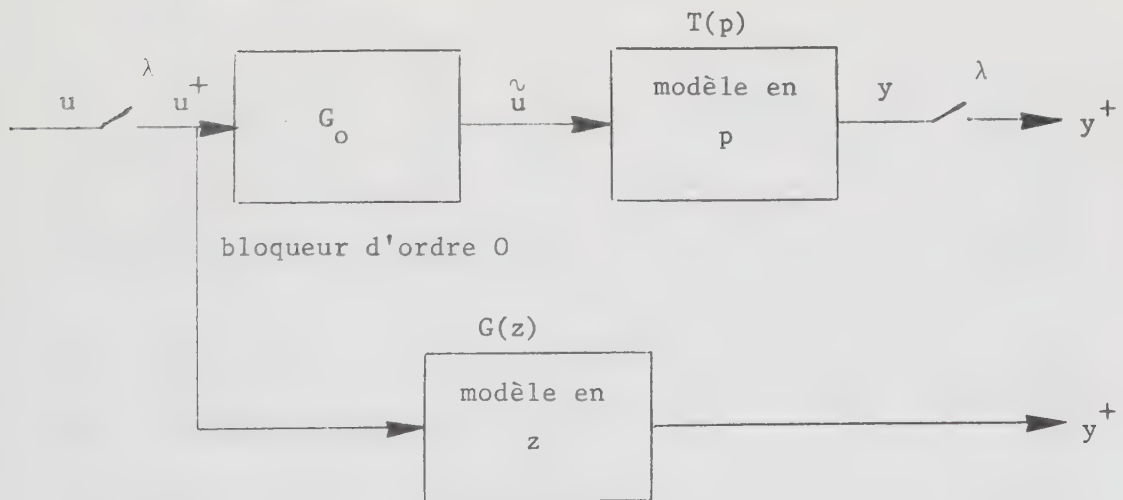


Fig. III,3

$$u^+(k\lambda) = u(k) \quad \tilde{u}(t) = u(k) \quad \text{pour } k \leq \lambda < k + 1$$

$$y^+(k\lambda) = y(k)$$

Calculons $G(z)$

$$G(z) = Z \left\{ G_o(p) T(p) \right\}$$

On sait que $G_o(p) = \frac{1 - e^{-\lambda p}}{p}$ pour un bloqueur d'ordre zéro.

On suppose que $T(p)$ est de la forme $\frac{K}{(p + a)(p + b)}$ aussi

$$\begin{aligned} G(z) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-\lambda p}}{p} \frac{K}{(p + a)(p + b)} \right\} \\ &= K(1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{p(p + a)(p + b)} \right\} \\ &= K(1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{1}{ab(b - a)} \left(\frac{b - a}{p} - \frac{b}{p + a} + \frac{a}{p + b} \right) \right\} \end{aligned}$$

aussi
$$G(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

avec
$$\left\{ \begin{aligned} a_1 &= \frac{K}{ab(b - a)} \left(b(1 - e^{-a\lambda}) - a(1 - e^{-b\lambda}) \right) \\ a_2 &= \frac{K}{ab(b - a)} \left(a e^{-a\lambda} (1 - e^{-b\lambda}) - b e^{-b\lambda} (1 - e^{-a\lambda}) \right) \\ b_1 &= - (e^{-a\lambda} + e^{-b\lambda}) \\ b_2 &= e^{-a\lambda} e^{-b\lambda} \end{aligned} \right.$$

On en déduit la relation suivante

$$y(k) = a_1 u(k - 1) + a_2 u(k - 2) - b_1 y(k - 1) - b_2 y(k - 2)$$

III - 3 - 2 - ALGORITHME DE LA METHODE DES MOINDRES CARRES

On a à résoudre par la méthode des moindres carrés le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_3 = a_1 u_2 + a_2 u_1 - b_1 v_2 - b_2 v_1 + e(3) \\ v_4 = a_1 u_3 + a_2 u_2 - b_1 v_3 - b_2 v_2 + e(4) \\ \vdots \\ v_k = a_1 u_{k-1} + a_2 u_{k-2} - b_1 v_{k-1} - b_2 v_{k-2} + e(k) \\ \vdots \\ v_M = a_1 u_{M-1} + a_2 u_{M-2} - b_1 v_{M-1} - b_2 v_{M-2} + e(M) \end{array} \right. \quad \text{soit encore}$$

$$\begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 & u_1 & -v_2 & -v_1 \\ u_3 & u_2 & -v_3 & -v_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k-1} & u_{k-2} & -v_{k-1} & -v_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{M-1} & u_{M-2} & -v_{M-1} & -v_{M-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e(3) \\ e(4) \\ \vdots \\ e(k) \\ \vdots \\ e(M) \end{pmatrix}$$

ϕ

d'après la méthode des moindres carrés

$$\phi^t \begin{pmatrix} v_3 \\ v_4 \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \\ v_M \end{pmatrix} = \phi^t \phi \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

On a donc à résoudre le système suivant d'ordre 4 symétrique.

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=2}^{M-1} u_i^2 & \sum_{i=2}^{M-1} u_i u_{i-1} & -\sum_{i=2}^{M-1} u_i v_i & -\sum_{i=2}^{M-1} u_i v_{i-1} \\ \sum_{i=2}^{M-1} u_i u_{i-1} & \sum_{i=2}^{M-1} v_i^2 & -\sum_{i=2}^{M-1} v_i u_i & -\sum_{i=2}^{M-1} v_i v_{i-1} \\ -\sum_{i=2}^{M-1} u_i v_i & -\sum_{i=2}^{M-1} v_i u_i & \sum_{i=2}^{M-1} u_i^2 & \sum_{i=2}^{M-1} u_i v_{i-1} \\ -\sum_{i=2}^{M-1} u_i v_{i-1} & -\sum_{i=2}^{M-1} v_i v_{i-1} & \sum_{i=2}^{M-1} u_i v_i & \sum_{i=2}^{M-1} v_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{ij} \end{pmatrix}$$

avec

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_{11} &= \sum_{i=2}^{M-1} u_i^2 \\ \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \sum_{i=2}^{M-1} u_i u_{i-1} \\ \alpha_{13} &= \alpha_{31} = -\sum_{i=2}^{M-1} u_i v_i \\ \alpha_{14} &= \alpha_{41} = -\sum_{i=2}^{M-1} u_i v_{i-1} \\ \alpha_{22} &= a_{11} + u_1^2 - u_{M-1}^2 \\ \alpha_{23} &= \alpha_{32} = -\sum_{i=2}^{M-1} u_{i-1} v_i \\ \alpha_{24} &= \alpha_{42} = a_{13} - u_1 v_1 + u_{M-1} v_{M-1} \\ \alpha_{33} &= \sum_{i=2}^{M-1} v_i^2 \\ \alpha_{34} &= \alpha_{43} = \sum_{i=2}^{M-1} v_i v_{i-1} \\ \alpha_{44} &= a_{33} + v_1^2 - v_{M-1}^2 \end{aligned} \right.$$

La méthode de résolution du système linéaire est la méthode de Cholesky sur calculateur CII 10 070.

III - 3 - 3 - ETUDE SIMULEE SUR LA REPONSE A UNE SEQUENCE BINAIRE

PSEUDO ALEATOIRE (SBPA)

On vérifie tout d'abord les propriétés des algorithmes moindres carrés simples, moindres carrés améliorés par K. STEIGLITZ et L.E. MAC BRIDE; ensuite on identifie le processus réel.

Le processus linéaire du 2ème ordre simulé est représenté par l'équation suivante déduite de l'identification : décomposition en somme d'exponentielles de la réponse indicielle par programme.

$$G(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}} \quad \text{avec}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 0,187352 \cdot 10^{-3} \\ a_2 = 0,177893 \cdot 10^{-3} \\ b_1 = -1,85189 \\ b_2 = 0,856055 \end{array} \right.$$

On calcule la réponse de ce système à une SBPA de période $n = 63$ de durée $T = 63$ mm, d'amplitude $UECH = 0,51$ V ; on échantillonne toutes les 10 secondes ce qui donne 378 échantillons $y(i)$ (i variant de 0 à 377).

III - 3 - 3 - 1 -Test de la méthode des moindres carrés

On ajoute aux échantillons $y(i)$ un bruit aléatoire gaussien provenant d'un sous programme GAUSS qui fait la somme de variables aléatoires indépendantes à répartition uniforme issues d'un sous programme RANDU. La valeur moyenne de ce bruit est nulle ; son écart type σ_b est fixé égal à $k_b \sigma_s$, k_b variant de 0 à 50% ;

avec

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{M-1} (y(i) - YMOY)^2}{M}}$$

$$YMOY = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} y(i)}{M}$$

On calcule comme tests de comparaison, W_1 , W_2 , W_3 avec

$$W_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{M-1} (v(i) - s(i))^2}{M}}$$

$$W_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{M-1} (v(i) - s(i))^2}{\sum_{i=0}^{M-1} (s(i) - SMOY)^2}}$$

$$W_3 = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{M-1} e^2(i)}{M}} \quad \text{avec}$$

$$SMOY = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} s(i)}{M}$$

$e(k)$ représente le résidu à l'instant k .

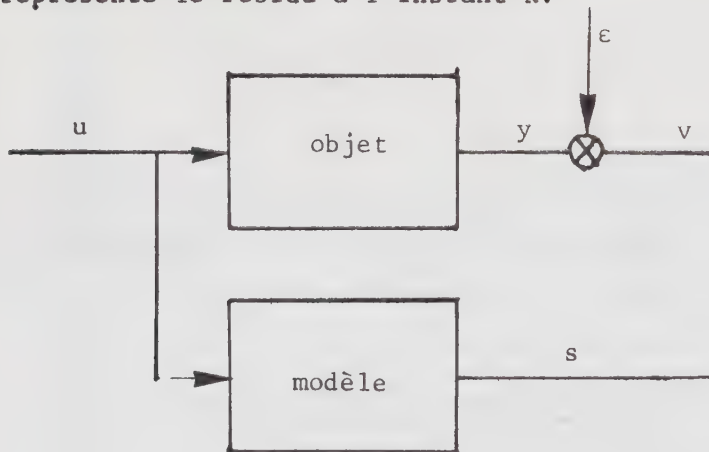


Fig. III,4

Sur le tableau (III,1) on s'aperçoit que pour $k_b = 4,6 \%$ la précision sur les paramètres est déjà mauvaise. On ne peut donc utiliser directement la méthode des moindres carrés dans notre cas où le bruit est assez important.

Tableau (III, I)

$k_D \%$	a_1	a_2	b_1	b_2	w_1	w_2	w_3
processus simulé	0,187352 E-03	0,177893 E-03	- 0,185189 E+01	0,856055			
0	0,187350 E-03	0,177893 E-03	- 0,185189 E+01	0,856055	0,214 E-06	0,218 E-04	0,342 E-08
4,6	0,316 E-04	0,935 E-03	- 0,110 E+01	0,104	0,863 E-02	0,127 E+01	0,869 E-03
9,2	0,873 E-04	0,115 E-02	- 0,717	- 0,279	0,796 E-02	0,133 E+01	0,142 E-02
13,7	0,206 E-03	0,107 E-02	- 0,594	- 0,397	0,672 E-02	0,132 E+01	0,195 E-02
18,3	0,332 E-03	0,917 E-03	- 0,541	- 0,443	0,653 E-02	0,148 E+01	0,249 E-02
22,9	0,458 E-03	0,745 E-03	- 0,511	- 0,464	0,703 E-02	0,185 E+01	0,303 E-02
27,5	0,582 E-03	0,566 E-03	- 0,492	- 0,473	0,775 E-02	0,236 E+01	0,359 E-02
32,1	0,704 E-03	0,385 E-03	- 0,476	- 0,476	0,846 E-02	0,297 E+01	0,414 E-02
36,7	0,823 E-03	0,604 E-03	- 0,463	- 0,475	0,911 E-02	0,369 E+01	0,469 E-02
41,3	0,942 E-03	0,237 E-04	- 0,451	- 0,472	0,970 E-02	0,452 E+01	0,524 E-02
45,8	0,106 E-02	-0,155 E-03	- 0,440	- 0,467	0,102 E-01	0,546 E+01	0,579 E-02
50,4	0,118 E-02	-0,333 E-03	- 0,429	- 0,460	0,107 E-01	0,653 E+01	0,633 E-02

III - 3 - 3 - 2 - Test de la méthode des moindres carrés améliorée
par K. Steiglitz et L.E. Mac Bride

On teste tout d'abord la méthode dans les mêmes conditions que précédemment ; on calcule en plus les variances Δa_1 , Δa_2 , Δb_1 , Δb_2 sur chaque paramètre a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , ce qui est possible puisqu'en fin d'identification les résidus sont blancs. On s'aperçoit que l'incertitude sur les paramètres a_1 et a_2 est plus grande que celle des paramètres b_1 et b_2 ; on note aussi une nette amélioration par rapport à la méthode des moindres carrés simple comme on peut le constater en examinant les colonnes W_2 sur les tableaux (III,1) et (III,2).

Il faut environ 20 itérations pour obtenir une estimation des paramètres.

Tableau (III,2)

$\kappa_b \%$	a_1	a_2	b_1	b_2	W_1	$W_2 \%$	W_3	Δb_1	Δb_2	Δa_1	Δa_2
PS	0,187352 E-03	0,177893 E-03	-0,185189 E+01	0,856055							
0	0,187329 E-03	0,177914 E-03	-0,185189 E+01	0,856054	0,436E-06	0,445E-02	0,811E-080,278E-070,272E-07			0,315E-09	0,365E-09
4,6	0,180 E-03	0,185 E-03	-0,185 E+01	0,856	0,474E-03	4,84	0,111E-020,378E-020,369E-02			0,431E-04	0,449E-04
9,2	0,176 E-03	0,189 E-03	-0,185 E+01	0,857	0,949E-03	9,68	0,222E-020,745E-020,728E-02			0,860E-04	0,995E-04
13,7	0,174 E-03	0,190 E-03	-0,185 E+01	0,857	0,142E-02	14,5	0,333E-020,109E-010,107E-01			0,128E-03	0,148E-03
18,3	0,176 E-03	0,186 E-03	-0,185 E+01	0,859	0,190E-02	19,3	0,445E-020,143E-010,139E-01			0,169E-03	0,195E-03
22,9	0,181 E-03	0,179 E-03	-0,185 E+01	0,860	0,237E-02	24,1	0,556E-020,173E-010,169E-01			0,209E-03	0,240E-03
27,5	0,188 E-03	0,168 E-03	-0,185 E+01	0,862	0,285E-02	28,9	0,668E-020,201E-010,196E-01			0,248E-03	0,284E-03
32,1	0,199 E-03	0,153 E-03	-0,186 E+01	0,864	0,332E-02	33,7	0,781E-020,226E-010,221E-01			0,284E-03	0,325E-03
36,7	0,214 E-03	0,134 E-03	-0,186 E+01	0,866	0,380E-02	38,5	0,893E-020,248E-010,242E-01			0,319E-03	0,363E-03
41,3	0,231 E-03	0,111 E-03	-0,186 E+01	0,869	0,427E-02	43,3	0,101E-010,267E-010,261E-01			0,353E-03	0,400E-03
45,8	0,252 E-03	0,834 E-04	-0,187 E+01	0,872	0,475E-02	48,1	0,112E-010,283E-010,277E-01			0,384E-03	0,434E-03
50,4	0,277 E-03	0,517 E-04	-0,187 E+01	0,875	0,522E-02	52,9	0,123E-010,297E-010,290E-01			0,414E-03	0,467E-03

III - 3 - 4 - APPLICATION DE LA METHODE DES MOINDRES CARRES AUX MESURES DIRECTES -

Le modèle en z retenu est :

$$y(k) = a_1 u(k-1) + a_2 u(k-2) - b_1 y(k-1) - b_2 y(k-2) \quad (\text{III};2)$$

$u(k)$ est connu parfaitement $\forall k$

$$u(k) = V_c(k) - \text{UDEP}$$

$V_c(k)$ tension de commande du calculateur à l'instant $k\lambda$

UDEP = tension à l'équilibre de commande du calculateur.

On estime $y(k)$ par l'intermédiaire de $v(k)$

$$v(k) = y(k) + \varepsilon(k)$$

$$v(k) = V_{H_2}(k) - \text{YDEP}$$

$V_{H_2}(k)$ = tension représentant H_2 mesurée à l'instant $k\lambda$

YDEP est la tension correspondant à UDEP

L'équation (III;2) s'écrit donc

$$\begin{aligned} (V_{H_2}(k) - \text{YDEP}) &= a_1 (V_c(k-1) - \text{UDEP}) + a_2 (V_c(k-2) - \text{UDEP}) - b_1 (V_{H_2}(k-1) \\ &- \text{YDEP}) - b_2 (V_{H_2}(k-2) - \text{YDEP}) + \underbrace{\varepsilon(k) + b_1 \varepsilon(k-1) + b_2 \varepsilon(k-2)}_{e(k)} \end{aligned}$$

Le problème est de connaître YDEP correspondant à UDEP ; supposons le système à l'équilibre : on fait n_E mesures tous les λ secondes de l'instant $\tau + (n_E - 1)\lambda$ et on écrit

$$\hat{\text{YDEP}} = \sum_{i=0}^{n_E-1} \frac{V_{H_2}(\tau + i\lambda)}{n_E}$$

$$V_{H_2}(\tau + i\lambda) = \text{YDEP} + \varepsilon(\tau + i\lambda)$$

$E(\hat{Y}_{DEP}) = Y_{DEP} + E \left(\sum_{i=0}^{n_E-1} \frac{\varepsilon(\tau + i\lambda)}{n_E} \right)$. L'estimateur $\hat{Y}_{DEP}$ n'est pas

biaisé si le bruit $\varepsilon(t)$ est à moyenne nulle.

$$E((\hat{Y}_{DEP} - Y_{DEP})(\hat{Y}_{DEP} - Y_{DEP})) = \frac{1}{n_E} E \left(\sum_{i=0}^{n_E-1} \varepsilon(\tau + i\lambda) \sum_{j=0}^{n_E-1} \varepsilon(\tau + j\lambda) \right)$$

si le bruit $\varepsilon(t)$ est blanc d'écart type σ alors l'écart type sur $(\hat{Y}_{DEP} - Y_{DEP})$ est aussi σ .

Modalités pratiques

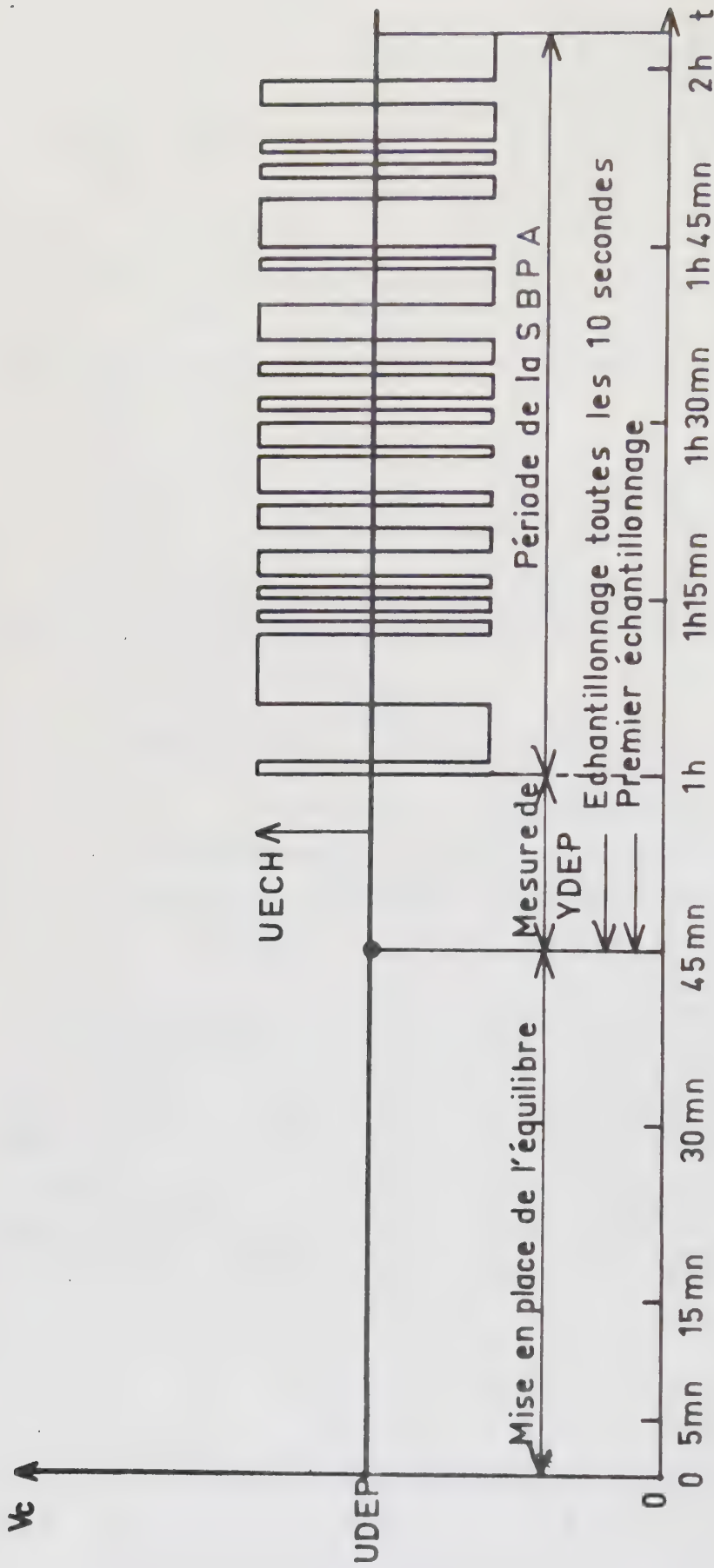
Pour améliorer le rapport signal sur bruit chaque type d'expérience est répété quatre fois ; Y_{DEP} ainsi que les points de mesure $V_{H_2}(k)$ sont obtenus par moyennage.

La SBPA de période 63 a une durée de 63 mm ; la cadence de mesure λ est de 10 s (fig.III,5).

Le système est identifié autour du point de repos correspondant à $V_c = 3,06$ V pour des amplitudes UECH de la SBPA égales successivement à :
0,157 V ; 0,275 V ; 0,51 V ; 1,02 V

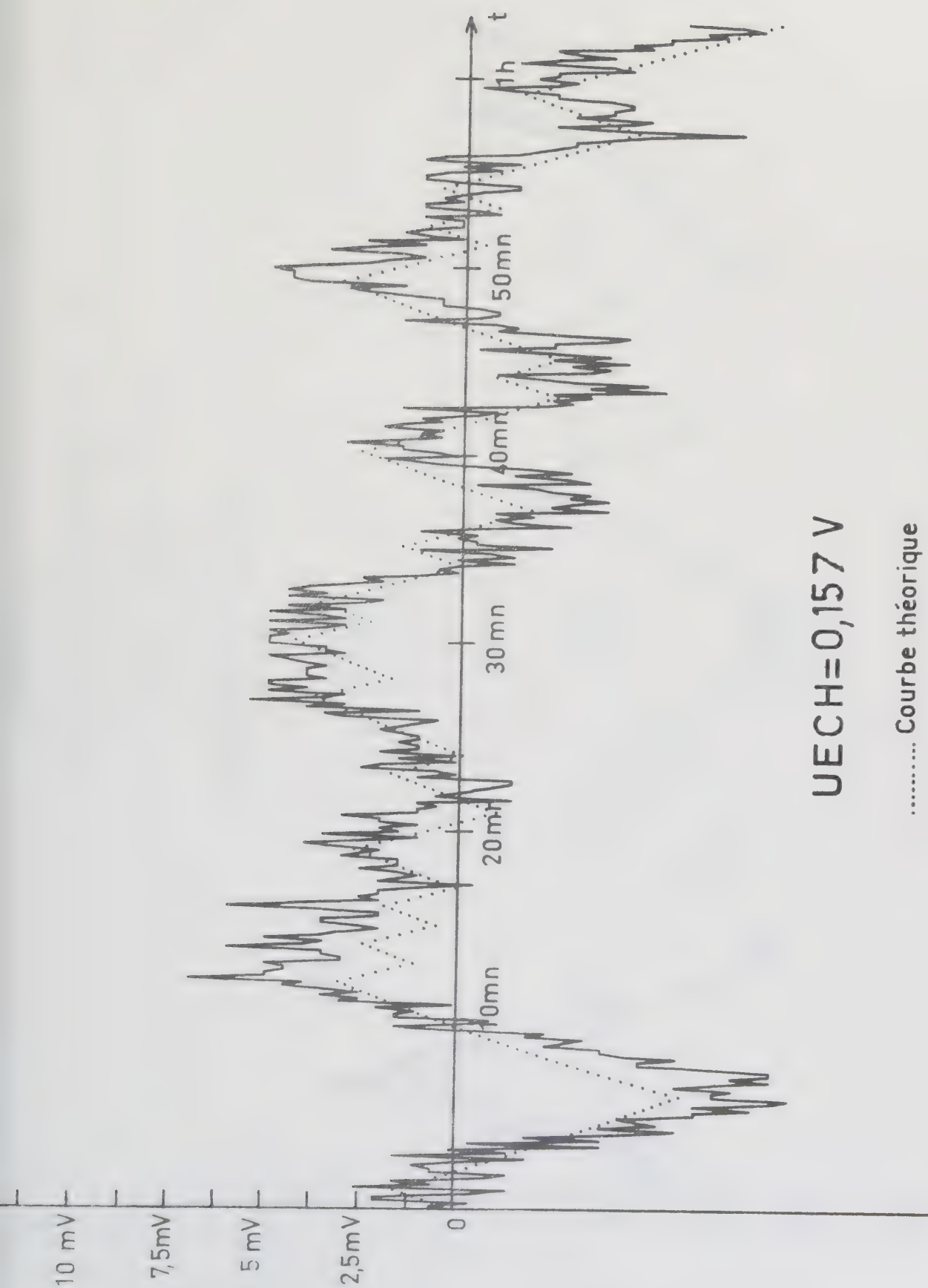
Evidemment le rapport signal sur bruit s'améliore au fur et à mesure que UECH croît comme on peut le constater sur les figures III,6 ; III,7 ; III,8 ;

III,9 . La méthode donne dans les quatre cas des résultats compatibles assurant de bonnes coïncidences entre la sortie expérimentale et la sortie modèle (tableau(III,3)). On retient comme modèle les valeurs données par la méthode dans le cas UECH = 0,275 V car dans ce cas le critère W_2 est faible et l'amplitude de la SBPA suffisamment petite pour que le processus soit bien représenté par un système linéaire.



Excitation du processus dans la méthode des moindres carrés
améliorée par K. Steiglitz et L.E. Mac Bride

Fig. III, 5

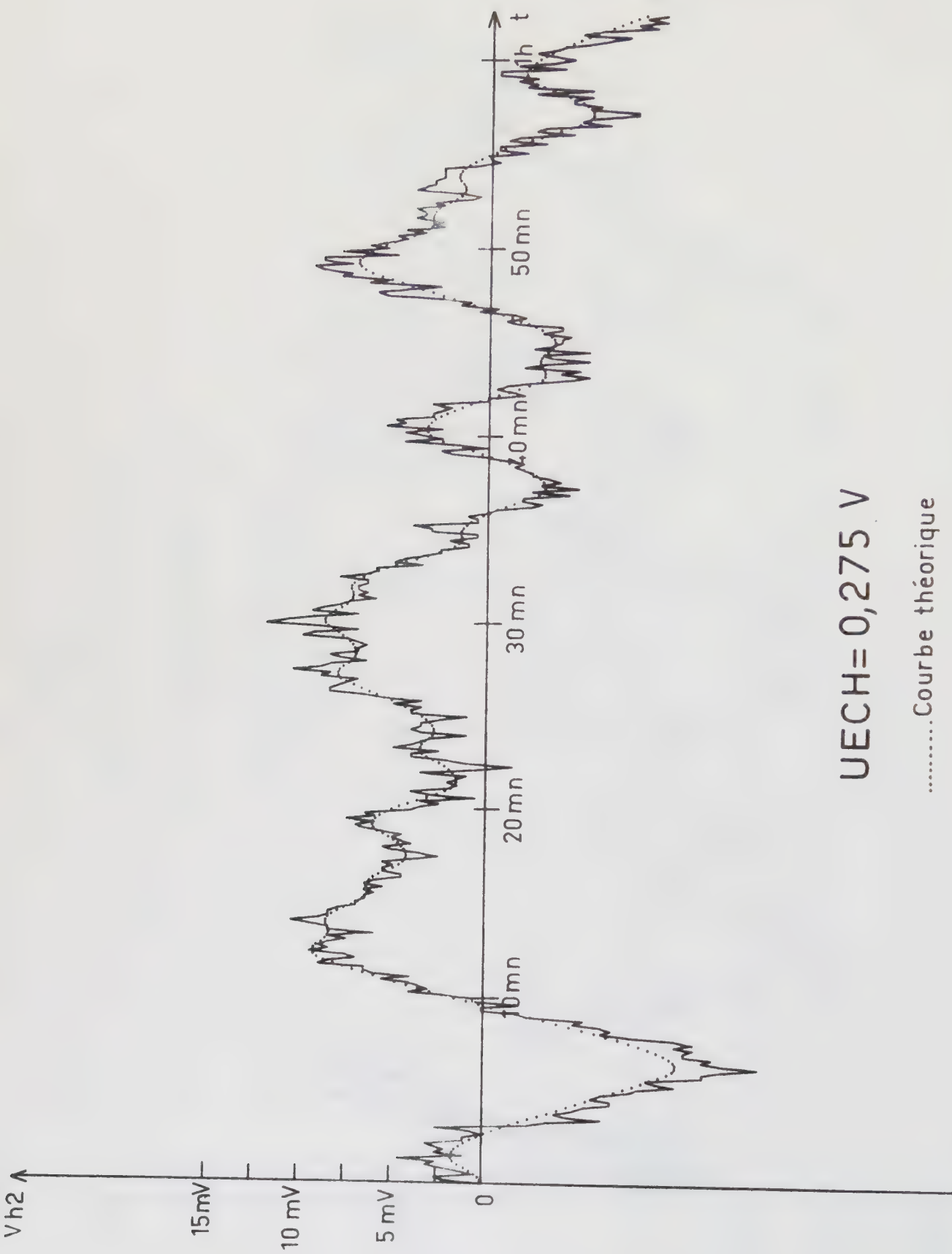


$UECH = 0,157 \text{ V}$

..... Courbe théorique

—— Courbe expérimentale

Fig. III, 6

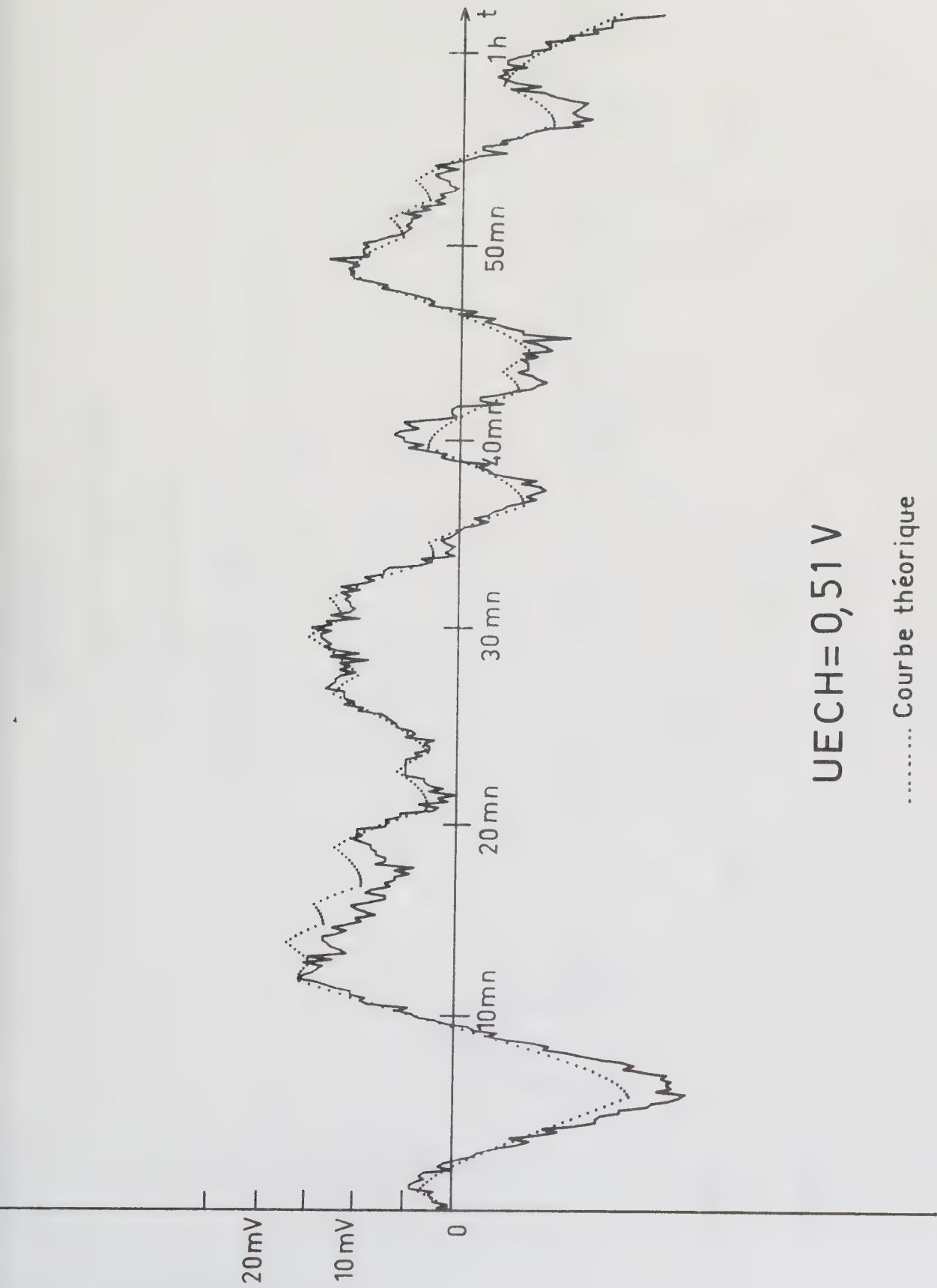


$UECH = 0,275 \text{ V}$

..... Courbe théorique

—— Courbe expérimentale

Fig. III, 7

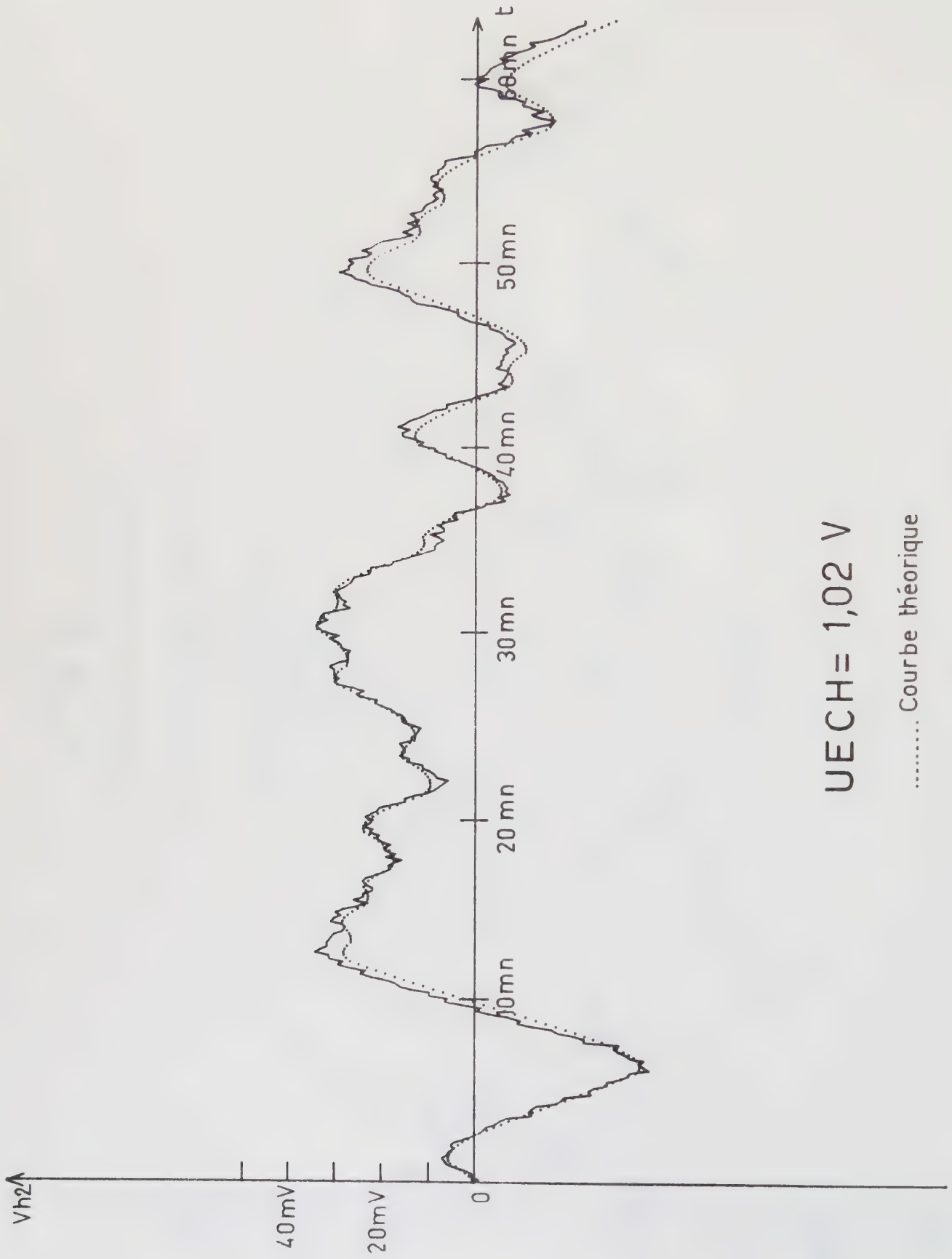


$UECH = 0,51 \text{ V}$

..... Courbe théorique

—— Courbe expérimentale

Fig. III, 8



UECH = 1,02 V

..... Courbe théorique

—— Courbe expérimentale

Fig. III, 9

Tableau (III, 3)

UECH	a_1	a_2	b_1	b_2	Δa_1	Δa_2	Δb_1	Δb_2	w_1	$w_2 \%$	w_3
0,157 V	0,208818E-02	-0,210643E-02	-0,199875E01	0,998429E00	0,356E-04	0,356E-04	0,203E-02	0,207E-02	0,160E-02	58,4	0,231E-02
0,275 V	0,257173E-03	0,574907E-04	-0,186903E01	0,872567E00	0,845E-04	0,965E-04	0,126E-01	0,123E-01	0,118E-02	23,3	0,223E-02
0,51 V	0,900685E-03	-0,744206E-03	-0,193222E01	0,934409E00	0,641E-04	0,711E-04	0,423E-02	0,413E-02	0,228E-02	26,4	0,240E-02
1,02 V	0,450247E-03	-0,207829E-03	-0,187992E01	0,882411E00	0,749E-04	0,868E-04	0,397E-02	0,390E-02	0,273E-02	16,2	0,222E-02

C H A P I T R E I V

Identifications à partir de la séquence de pondération obtenue par corrélation.

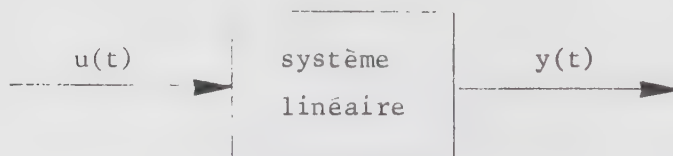
Dans la première partie de ce chapitre sont exposées deux manières d'obtenir la fonction de transfert en p d'un système linéaire à partir de la séquence de pondération calculée par corrélation entre une séquence binaire pseudoaléatoire excitant le système et sa réponse.

Dans la première méthode on applique le programme décomposition en somme d'exponentielles à la réponse impulsionnelle déduite de la séquence de pondération ; dans la deuxième on applique le même programme à la réponse indicielle déduite elle aussi de la séquence de pondération.

On étudie ensuite l'effet d'un bruit aléatoire à répartition gaussienne sur l'identification par les deux méthodes précédentes d'un système du 2ème ordre simulé. Puis on identifie le processus hydraulique.

IV - 1 - PRINCIPE - (13), (14), (15)

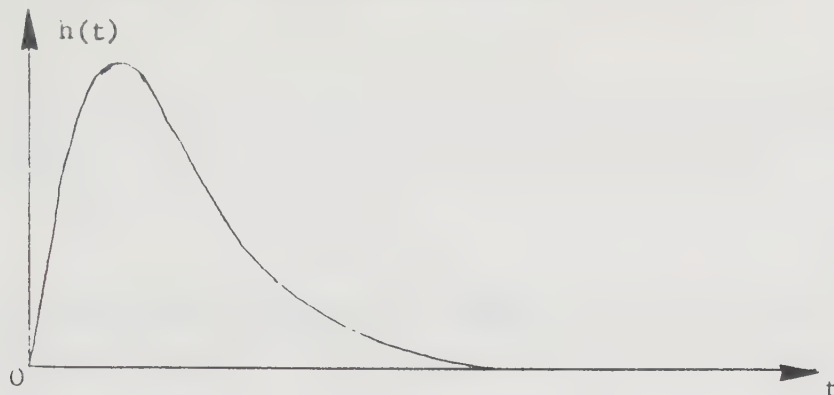
Soit le système suivant



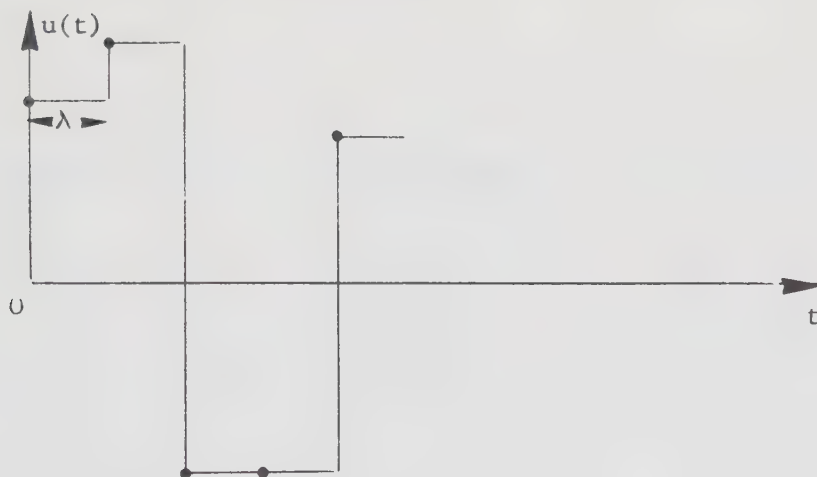
D'après la théorie de la convolution on peut écrire :

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

$h(t)$ est la réponse impulsionnelle d'un système linéaire asymptotiquement stable dont la forme approximative est la suivante



$u(t)$ est un signal en escalier commandé par le calculateur



$$u(t) = u(k\lambda) \text{ pour } k\lambda \leq t < (k+1)\lambda$$

Calculons $y(k\lambda)$ dans le cas du signal $u(t)$ précédent

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau && \text{donc} \\ y(k\lambda) &= \int_0^{\infty} h(\tau) u(k\lambda - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^{\lambda} h(\tau) u((k-1)\lambda) d\tau + \dots + \int_{(i-1)\lambda}^{i\lambda} h(\tau) u((k-i)\lambda) d\tau + \dots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} u((k-i)\lambda) \int_{(i-1)\lambda}^{i\lambda} h(\tau) d\tau \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous la forme d'une séquence de pondération

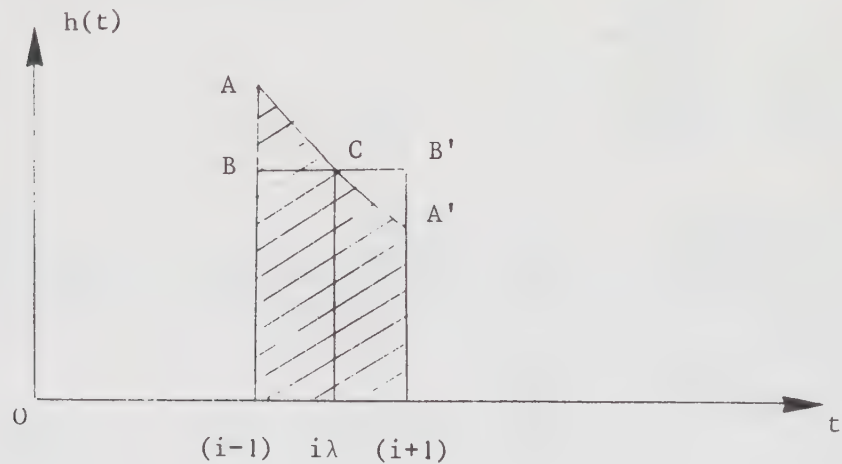
$$y(k\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i u((k-i)\lambda)$$

avec

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_i = \int_{(i-1)\lambda}^{i\lambda} h(\tau) d\tau, \quad i \geq 1 \end{cases}$$

IV - 1 - 1 - OBTENTION DE LA REPONSE IMPULSIONNELLE -

Supposons connue la séquence de pondération $\{f_i\}$



Si λ est assez petit on peut écrire

$$f_i = \int_{(i-1)\lambda}^{i\lambda} h(\tau) d\tau \approx h(i\lambda)\lambda + \text{aire du triangle } ABC$$

$$f_{i+1} = \int_{i\lambda}^{(i+1)\lambda} h(\tau) d\tau \approx h(i\lambda)\lambda - \text{aire du triangle } A'B'C$$

Les triangles ABC et $A'B'C$ sont presque égaux donc :

$$h(i\lambda) \approx \frac{1}{2\lambda} (f_i + f_{i+1}) \quad \text{pour } i \neq 0$$

dans notre cas on sait que $h(0) = 0$

Evidemment l'approximation précédente est peu précise au voisinage du sommet ; vu la courbure de la courbe on trouve $h(i\lambda)$ inférieur à sa valeur réelle.

Il est donc possible d'approcher la réponse impulsionnelle une fois la séquence de pondération $\{f_i\}$ connue.

IV - 1 - 2 - OBTENTION DE LA REPONSE INDICIELLE -

Prenons le signal $u(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$ alors

$$d(k\lambda) = \sum_{i=0}^k f_i = \int_0^{k\lambda} h(\tau) d\tau$$

donc $d(k\lambda)$ est la discrétisation de la réponse indicielle continue. On peut donc déduire la réponse indicielle discrète de la séquence de pondération.

IV - 1 - 3 - CALCUL DE LA SEQUENCE DE PONDERATION PAR CORRELATION -

On sait que

$$y(k\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i u((k-i)\lambda) \quad (IV,1)$$

Supposons que pour $j > \beta$ $f_j = 0$ donc

$$y(k\lambda) = \sum_{i=0}^{\beta} f_i u((k-i)\lambda)$$

Soit un signal en escalier u' défini comme précédemment.

Soit $\phi u'y(s\lambda)$ la fonction d'intercorrélation entre u' et y définie comme suit :

$$\phi u' y(s\lambda) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2L+1} \sum_{k=-L}^{k=L} u'((k-s)\lambda) y(k\lambda) \text{ quand } L \rightarrow \infty$$

remplaçons $y(k\lambda)$ par son expression (IV,1)

$$\begin{aligned} \phi u' y(s\lambda) &= \frac{1}{2L+1} \sum_{k=-L}^{k=L} u'((k-s)\lambda) \sum_{i=0}^{\beta} f_i u((k-i)\lambda) \\ &= \frac{1}{2L+1} \sum_{i=0}^{\beta} f_i \sum_{k=-L}^{k=L} u'((k-s)\lambda) u(k-i\lambda) \end{aligned} \quad (\text{IV},2)$$

posons

$$\phi u' u(s\lambda) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2L+1} \sum_{i=0}^{\beta} f_i \sum_{k=-L}^{k=L} u'((k-s)\lambda) u(k\lambda) \text{ quand } L \rightarrow \infty$$

(IV,2) devient :

$$\phi u' y(s\lambda) = \sum_{i=0}^{\beta} f_i \phi u' u((s-i)\lambda) \quad (\text{IV},3)$$

Soit deux signaux u et u' tels que

$$\phi u' u(s\lambda) = \delta(s\lambda) \quad \text{alors}$$

(IV,3) devient

$$\phi u' y(s\lambda) = f_s$$

On peut donc déduire la séquence de pondération du calcul de la fonction d'intercorrélation entre u' et y dans le cas où la fonction d'intercorrélation entre u' et u est de la forme

$$\phi u' u(s\lambda) = \delta(s\lambda)$$

IV - 1 - 4 - METHODE PAR CORRELATION AVEC UNE SBPA COMME ENTREE -

La séquence binaire pseudoaléatoire est un signal de période $T = M\lambda$, d'amplitude $\pm U_{ECH}$ dont la fonction d'autocorrélation $\phi_{uu}(\lambda s)$ est aussi périodique de période T (voir annexe).

- u est un signal périodique aussi

$$\phi_{uu}(s\lambda) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} u((k-s)\lambda) u(k\lambda)$$

D'après l'annexe

$$\begin{aligned} \phi_{uu}(s\lambda) &= U_{ECH}^2 \text{ pour } s = 0 \\ &= -\frac{U_{ECH}^2}{M} \text{ pour } s = k \quad k \neq 0 \end{aligned}$$

- Soit le signal $u' = u + U_{ECH}$; on peut écrire de la même manière que précédemment :

$$\phi_{u'u}(s\lambda) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} u'((k-s)\lambda) u(k\lambda)$$

D'après l'annexe

$$\begin{aligned} \phi_{u'u}(s\lambda) &= \frac{M+1}{M} U_{ECH}^2 \text{ pour } s = 0 \\ &= 0 \text{ pour } s = k \neq 0 \end{aligned}$$

- u est périodique aussi y est également périodique

$$\phi_{u'y}(s\lambda) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} u'((k-s)\lambda) y(k\lambda) = \frac{M+1}{M} U_{ECH}^2 f_s$$

d'où

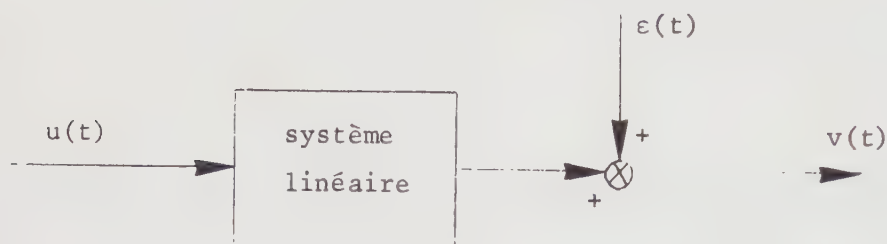
$$f_s = \frac{1}{(M+1) U_{ECH}^2} \sum_{k=0}^{M-1} u'((k-s)\lambda) y(k\lambda)$$

$$h(i\lambda) \neq \frac{1}{(M+1) U_{ECH}^2 \lambda} \sum_{k=0}^{M-1} u'((k-i)\lambda) \frac{(y(k\lambda) + y((k+1)\lambda))}{2}$$

On en déduit

$$d(k\lambda) = \frac{1}{(M+1) \text{UECH}^2} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{M-1} u'((j-i)\lambda) y(j\lambda)$$

IV - 2 - ETUDE DE LA METHODE EN PRESENCE DE BRUIT -



avec $\varepsilon(t)$ bruit blanc de valeur moyenne $M\varepsilon$, de variance σ^2 . On va étudier les effets du bruit $\varepsilon(t)$ successivement sur le calcul de la séquence de pondération, de la réponse impulsionnelle, de la réponse indicielle.

IV - 2 - SEQUENCE DE PONDERATION -

On calcule une estimation $\hat{f}_s$ de f_s avec

$$\hat{f}_s = \frac{1}{(M+1) \text{UECH}^2} \sum_{k=0}^{M-1} u'((k-s)\lambda) v(k\lambda)$$

on peut écrire

$$\hat{f}_s = f_s + \Delta f_s \quad \text{avec}$$

$$\Delta f_s = \frac{1}{(M+1) \text{UECH}^2} \sum_{k=0}^{M-1} u'((k-s)\lambda) \varepsilon(k\lambda)$$

Calculons $E(\Delta f_s)$ et $E(\Delta f_s - E(\Delta f_s))^2$

. Calcul de $E(\Delta f_s)$

$$\begin{aligned} E(\Delta f_s) &= \frac{1}{(M+1) \text{UECH}^2} \sum_{k=0}^{M-1} u'((k-s)\lambda) E(\varepsilon(k\lambda)) \\ &= \frac{M\varepsilon}{(M+1) \text{UECH}^2} \sum_{k=0}^{M-1} u'((k-s)\lambda) \end{aligned}$$

Mais d'après l'annexe

$$\sum_{k=0}^{M-1} u'((k-s)\lambda) = (M+1) \text{UECH} \text{ donc :}$$

$$E(\Delta f_s) = \frac{M\varepsilon}{\text{UECH}} \quad \text{pour } s \neq 0$$

L'estimation de f_s est entachée d'un biais qui peut être connu expérimentalement, en effet $f_s \rightarrow 0$ quand $s \rightarrow \infty$ donc :

$$\frac{M\varepsilon}{\text{UECH}} = E(\hat{f}_s) \quad \text{pour } s \rightarrow \infty$$

. Calcul de $E(\Delta f_s - E(\Delta f_s))^2$

$$\begin{aligned} E(\Delta f_s - E(\Delta f_s))^2 &= \frac{1}{(M+1)^2 \text{UECH}^4} E \left(\sum_{k=0}^{M-1} u'((k-s)\lambda) (\varepsilon(k\lambda) - M\varepsilon) \right)^2 = \\ &= \frac{1}{(M+1)^2 \text{UECH}^4} E \left(\sum_{k=0}^{M-1} u'((k-s)\lambda) \Delta \varepsilon(k\lambda) \right) \sum_{k'=0}^{M-1} u'((k'-s)\lambda) \Delta \varepsilon(k'\lambda) \quad (\text{IV},4) \end{aligned}$$

avec $\Delta \varepsilon(k\lambda) = \varepsilon(k\lambda) - M\varepsilon$

(IV,4) peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(M+1)^2 \text{UECH}^4} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{k'=0}^{M-1} u'((k-s)\lambda) u'((k'-s)\lambda) E(\Delta \varepsilon(k\lambda) \Delta \varepsilon(k'\lambda)) = \\ &= \frac{\sigma^2}{(M+1)^2 \text{UECH}^4} \sum_{k=0}^{M-1} u'^2((k-s)\lambda) \end{aligned}$$

D'après l'annexe $\sum_{k=0}^{M-1} u'^2((k-s)\lambda) = 2(M+1) \text{UECH}^2$ donc

$$E(\Delta f_s - E(\Delta f_s))^2 = \frac{2 \sigma^2}{(M+1) \text{UECH}^2}$$

Pour que la variance de l'estimation $\hat{f}_s$ soit faible UECH et M doivent être assez grands.

IV - 2 - 2 - REPONSE IMPULSIONNELLE -

On calcule une estimation $\hat{h}(i\lambda)$ de $h(i\lambda)$ avec

$$\hat{h}(i\lambda) = \frac{1}{(M+1) \text{UECH}^2 \lambda} \sum_{k=0}^{M-1} u'((k-i)\lambda) \frac{(v(k\lambda) + v((k+1)\lambda))}{2}$$

On peut écrire

$$\hat{h}(i\lambda) = n(i\lambda) + \Delta h(i\lambda) \quad \text{avec}$$

$$\Delta h(i\lambda) = \frac{1}{(M+1) \text{UECH}^2 \lambda} \sum_{k=0}^{M-1} u'((k-i)\lambda) \frac{(\epsilon(k\lambda) + \epsilon((k+1)\lambda))}{2}$$

Des calculs analogues aux précédents montrent que

$$E(\Delta h(i\lambda)) = \frac{M \epsilon}{\text{UECH} \lambda} \quad \text{pour } i \neq 0$$

L'estimation de $h(i\lambda)$ est entachée d'un biais qui peut être connu expérimentalement ; en effet $h(i\lambda) \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow \infty$ donc

$$\frac{M \epsilon}{\text{UECH} \lambda} = E(\hat{h}(i\lambda)) \quad \text{quand } i \rightarrow \infty$$

$$E(\Delta h(i\lambda) - E(\Delta h(i\lambda)))^2 = \frac{3 \sigma^2}{2(M+1) \text{UECH}^2 \lambda^2}$$

Pour que la variance de l'estimation de $h(i\lambda)$ soit faible, l'amplitude UECH et la période M de la SBPA doivent être assez grandes, mais il ne faut pas échantillonner trop vite (λ pas trop petit).

IV - 2 - 3 - REPONSE INDICIELLE -

On calcule une estimation $\hat{d}(k\lambda)$ de $d(k\lambda)$ avec

$$\hat{d}(k\lambda) = \frac{1}{(M+1) \text{UECH}^2} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{M-1} u'((j-i)\lambda) v(j\lambda)$$

On peut écrire

$$d(k\lambda) = \hat{d}(k\lambda) + \Delta d(k\lambda) \text{ avec}$$

$$\Delta d(k\lambda) = \frac{1}{(M+1) \text{UECH}^2} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{M-1} u'((j-i)\lambda) \varepsilon(j\lambda)$$

Calculons $E(\Delta d(k\lambda))$ et $E((\Delta d(k\lambda) - E(\Delta d(k\lambda)))^2)$

. Calcul de $E(\Delta d(k\lambda))$

$$\begin{aligned} E(\Delta d(k\lambda)) &= \frac{1}{(M+1) \text{UECH}^2} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{M-1} u'((j-i)\lambda) E(\varepsilon(j\lambda)) \\ &= \frac{M_\varepsilon}{(M+1) \text{UECH}^2} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{M-1} u'((j-i)\lambda) \end{aligned}$$

Mais d'après l'annexe

$$\sum_{j=0}^{M-1} u'((j-i)\lambda) = (M+1) \text{UECH} \text{ donc :}$$

$$E(\Delta d(k\lambda)) = \frac{M_\varepsilon (k+1)}{\text{UECH}}$$

L'estimation de la réponse indicielle est entachée d'un biais fonction de k , aussi pour éviter ce biais nous calculerons la réponse indicielle à partir de la formule

$$\hat{d}(k\lambda) = \frac{1}{(M+1) \text{UECH}^2} \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{M-1} u'((j-i)\lambda) (v(j\lambda) - \hat{M}_\varepsilon)$$

$\hat{M}_\varepsilon$ est l'estimation de M_ε connue expérimentalement à partir de la séquence de pondération.

. Calcul de $E(\Delta d(k\lambda) - E(\Delta d(k\lambda)))^2$

Cette quantité est égale à :

$$\frac{1}{(M+1)^2 \text{UECH}^4} E \left(\sum_{j=0}^{M-1} u''(j\lambda) (\Delta \varepsilon(j\lambda)) \right)^2 \quad (\text{IV},5)$$

$$\text{avec } u''(j\lambda) = \sum_{i=0}^{\kappa} u'((j-i)\lambda)$$

(IV,5) peut s'écrire

$$\frac{1}{(M+1)^2 \text{UECH}^4} E \left(\sum_{j=0}^{M-1} u''(j\lambda) \Delta \varepsilon(j\lambda) \sum_{j'=0}^{M-1} u''(j'\lambda) \Delta \varepsilon(j'\lambda) \right) =$$

$$\frac{1}{(M+1)^2 \text{UECH}^4} \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{j'=0}^{M-1} u''(j\lambda) u''(j'\lambda) E(\Delta \varepsilon(j\lambda) \Delta \varepsilon(j'\lambda)) =$$

$$\frac{\sigma^2}{(M+1)^2 \text{UECH}^4} \sum_{j=0}^{M-1} u''^2(j\lambda)$$

$$\text{D'après l'annexe} \quad \sum_{j=0}^{M-1} u''(j\lambda) = (k+1)(k+2)(M+1) \text{UECH}^2$$

$$\text{donc } E(\Delta d(k\lambda) - E(\Delta d(k\lambda)))^2 = \frac{(k+1)(k+2) \sigma^2}{(M+1) \text{UECH}^2}$$

Pour que la variance de l'estimation $\hat{d}(k\lambda)$ soit faible UECH et M doivent être assez grands.

Dans le cas de la réponse indicielle le rapport signal sur bruit est supérieur au cas de la réponse impulsionnelle ; en effet on intègre la réponse impulsionnelle pour obtenir la réponse indicielle ; d'autre part la réponse impulsionnelle estimée est entachée d'un biais systématique du aux approximations de calcul, alors que ce biais est théoriquement inexistant dans le cas de la réponse indicielle.

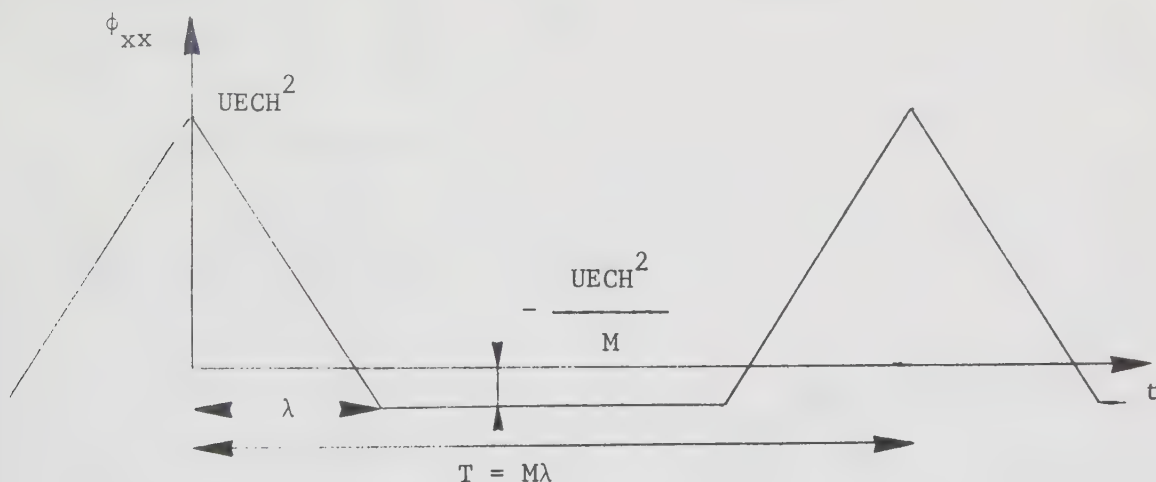
IV - 3 - CHOIX DES PARAMETRES DE LA SBPA .

IV - 3 - 1 - A PARTIR DES SPECTRES RESPECTIFS DU SYSTEME ET DE LA SBPA

Le système doit être excité convenablement ; pour cela il faut que la bande passante du processus contienne des raies de la SBPA.

Pour obtenir le spectre de densité de puissance du signal, calculons la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de la SBPA.

Soit $\phi_{xx}(t)$ cette fonction d'autocorrélation ; elle a la forme suivante :



$$\phi_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{xx}(t) e^{j\omega t} dt$$

$\phi_{xx}(t)$ est une fonction paire de t aussi :

$$\phi_{xx}(\omega) = 2 \int_0^{+\infty} \phi_{xx}(t) \cos \omega t dt$$

$\phi_{xx}(t)$ est périodique de période $M\lambda$ aussi le spectre est composé de raies discrètes dont la fréquence est un multiple de la fréquence de

$$\text{base } \frac{1}{M\lambda}$$

Aussi on peut écrire :

$$i_{xx}(f) = UECH^2 \frac{(M+1)}{M} \lambda \sum_{r=1}^M \left(\frac{\sin(r\pi/M)}{r\pi/M} \right)^2$$

Aux faibles fréquences la densité de puissance a la valeur

$$UECH^2 \frac{(M+1)}{M} \lambda$$

Elle est à peu près constante jusqu'à $\frac{f_c}{20}$, la réduction de puissance n'atteignant que 0,0358 dB à cette fréquence. Le point à - 0,1 dB correspond à $0,085 f_c$ et le point à - 3 dB à $0,45 f_c$.

Le spectre de densité de puissance est représenté dans la fig. IV,1

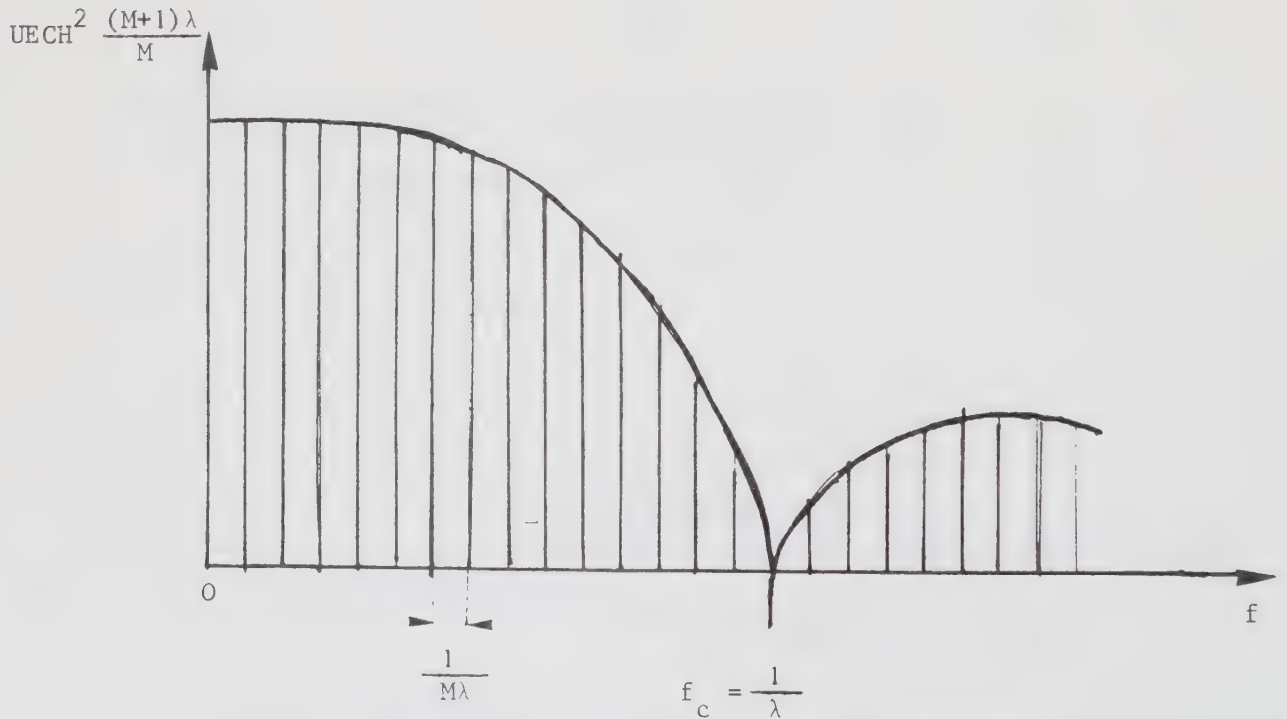


FIGURE IV,1

Soient $t_{\min}$ et $t_{\max}$ les constantes de temps minimum et maximum de notre processus ; on peut approximer la fonction de transfert du système par la figure IV,2

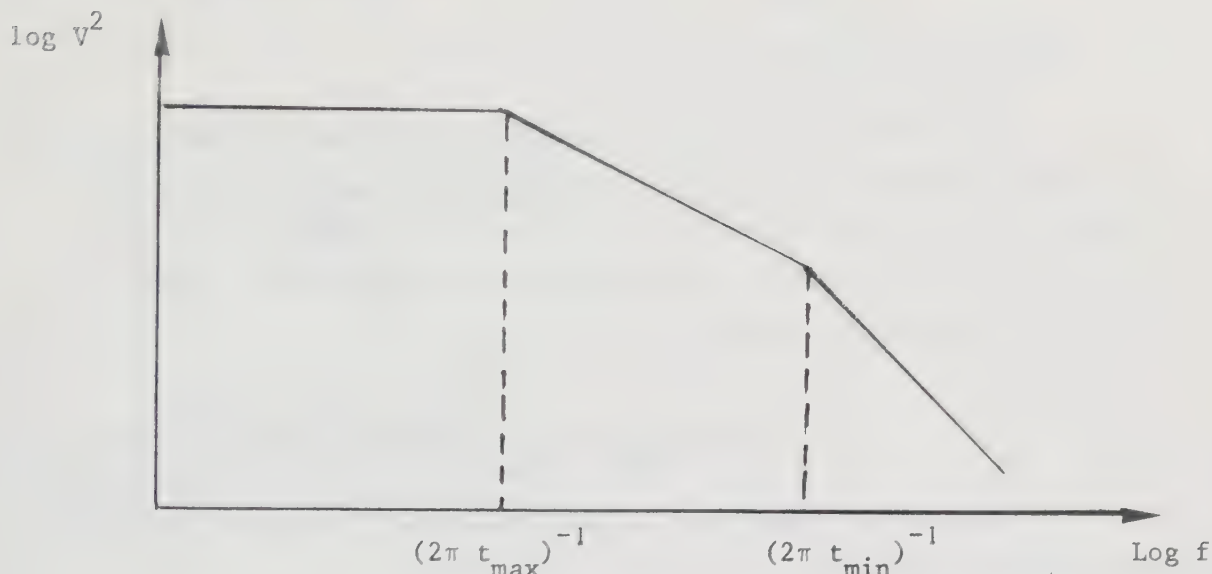


FIGURE IV,2

Pour que le système précédent soit excité convenablement on déduit des figures IV,1 ; IV,2.

$$\frac{1}{2\pi t_{\min}} < \frac{0,085}{\lambda} \Rightarrow 2\lambda < t_{\min} \text{ (cette condition est impor-}$$

tante dans le cas de la réponse impulsionnelle ; nos approximations ne sont valables que si λ est assez petit)

$$\frac{1}{M\lambda} < \frac{1}{2\pi t_{\max}} \Rightarrow M\lambda > 6 t_{\max}$$

IV - 3 - 2 - A PARTIR DE CONSIDERATIONS SUR LES VARIANCES -

Dans le cas de la séquence de pondération et de la réponse indicielle M et $UECH$ doivent être assez grands ; dans le cas de la réponse impulsionnelle on a une condition supplémentaire sur λ qui ne doit pas être trop petit.

On choisit un compromis entre les différentes conditions précédentes.

IV - 4 - ETUDE EXPERIMENTALE -

On étudie tout d'abord l'influence d'un bruit aléatoire à répartition gaussienne sur l'identification d'un processus linéaire du deuxième ordre simulé à partir de la réponse impulsionnelle et de la réponse indicielle déduites de la séquence de pondération ; ensuite on identifie le processus réel.

IV - 4 - 1 - IDENTIFICATION D'UN SYSTEME DU DEUXIEME ORDRE SIMULE

Le système simulé est le même que dans l'étude de la méthode des moindres carrés.

CHOIX DE LA SBPA

On choisit une SBPA de période 127 d'amplitude UECH = 0,51 V

Le paramètre λ de cette SBPA doit répondre aux conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} M\lambda > 6 t_{\max} \\ t_{\min} > 2\lambda \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{\max} = 260 \text{ s} \\ t_{\min} = 85,5 \text{ s} \end{array} \right.$$

Ce qui donne $12 \text{ s} < \lambda < 42 \text{ s}$

On choisit $\lambda = 30 \text{ s}$

On calcule la séquence de corrélation sur la quatrième séquence de la SBPA pour attendre l'extinction des transitoires ; on ajoute à la sortie le bruit aléatoire à répartition gaussienne défini par son écart type $\sigma_b = k_b \sigma_\epsilon$ (voir chapitre III). On applique le programme décomposition en somme d'exponentielles à la réponse impulsionnelle et à la réponse indicielle déduites de la séquence de pondération.

IV - 4 - 1 - 1 - REPONSE IMPULSIONNELLE -

k_b varie de 0 à 70 % ; on étudie la qualité de l'identification en calculant les critères W_1, W_2, W_3, W_4 définis ci-dessous (fig. IV,3)

$$W_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{M-1} (\hat{h}(i\lambda) - h_o(i\lambda))^2}{M}}$$

$$W_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{M-1} (\hat{h}(i\lambda) - h_o(i\lambda))^2}{\sum_{i=0}^{M-1} (h_o(i\lambda) - HMOY)^2}}$$

$$W_3 = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{M-1} (h_M(i\lambda) - \hat{h}(i\lambda))^2}{\sum_{i=0}^{M-1} (h_o(i\lambda) - HMOY)^2}}$$

$$W_4 = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{M-1} (h_M(i\lambda) - h_o(i\lambda))^2}{\sum_{i=0}^{M-1} (h_o(i\lambda) - HMOY)^2}}$$

$$HMOY = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} h_o(i)}{M}$$

Le biais est systématiquement supprimé en retranchant à chaque point de la réponse impulsionnelle la quantité $\frac{M_\epsilon}{UECH \lambda}$. Cette quantité est calculée en faisant la moyenne des soixante derniers points de la réponse impulsionnelle.

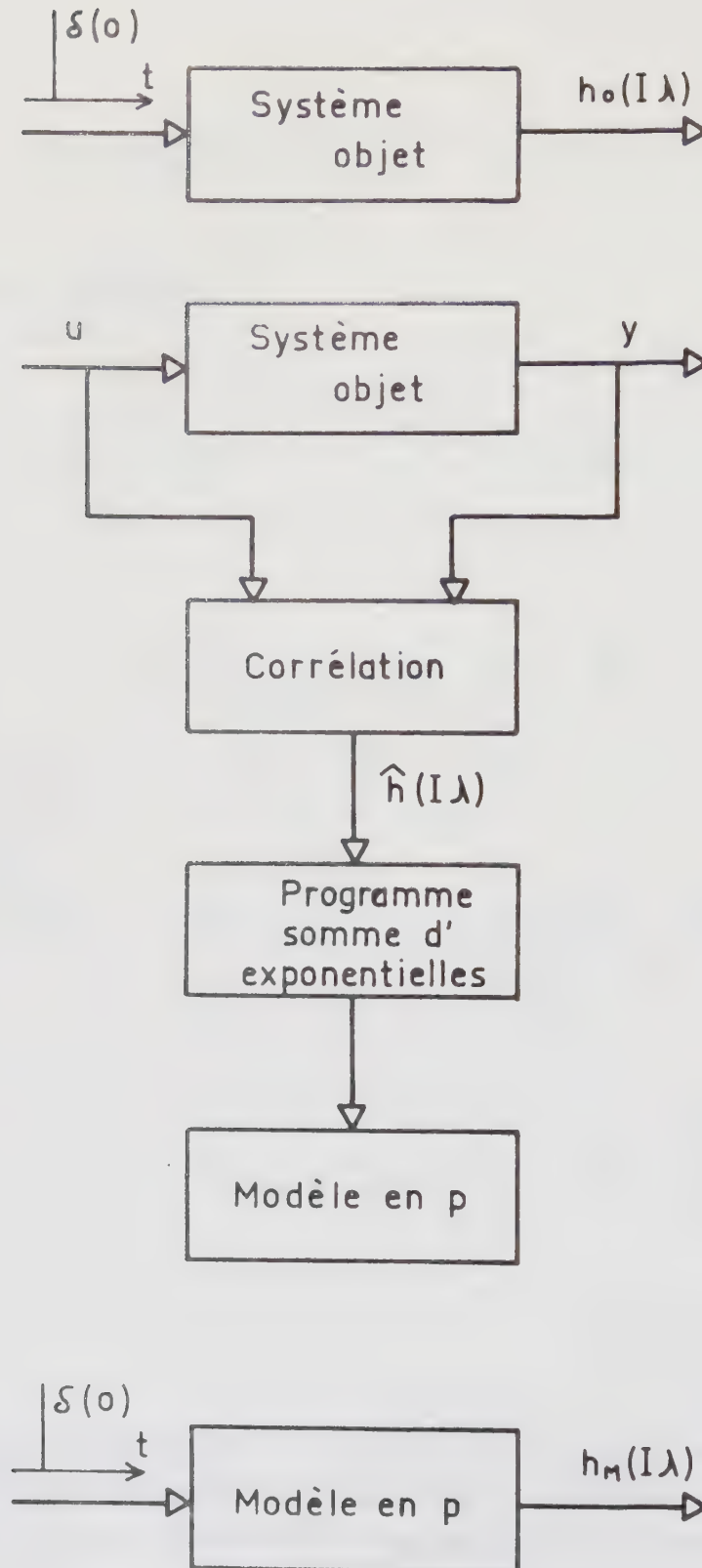


Fig. IV, 3

Sur les figures IV,4 ; IV,5 ; IV,6 ; IV,7 ; sont représentées les réponses impulsionnelles théoriques et estimées par $k_b = 0\%$, 6,4 %, 31,8 %, 63,6 %.

Sur le tableau (IV,1) sont indiqués pour chaque valeur de k_b les critères W_1, W_2, W_3, W_4 ainsi que le modèle en p déduit de la réponse impulsionnelle estimée à partir du programme somme d'exponentielles.

On constate que l'identification est relativement bonne sur la colonne W_4 même pour des valeurs de k_b élevées, d'autre part pour des valeurs de k_b entre 0 % et 38,2 % le modèle en p estimé ne contient pas de terme en p au numérateur.

IV - 4 - 1 - 2 - REPONSE INDICIELLE -

k_b varie de 0 à 70 % ; on étudie la qualité de l'identification en calculant les critères W_1, W_2, W_3, W_4 définis ci-dessous (fig. IV,8)

$$W_1 = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{M-1} (\hat{d}(k\lambda) - d_o(k\lambda))^2}{M}}$$

$$W_2 = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{M-1} (\hat{d}(k\lambda) - d_o(k\lambda))^2}{\sum_{k=0}^{M-1} (d_o(k\lambda) - \text{DMOY})^2}}$$

$$W_3 = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{M-1} (d_M(k\lambda) - \hat{d}(k\lambda))^2}{\sum_{k=0}^{M-1} (d_o(k\lambda) - \text{DMOY})^2}}$$

$$W_4 = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{M-1} (d_M(k\lambda) - d_o(k\lambda))^2}{\sum_{k=0}^{M-1} (d_o(k\lambda) - \text{DMOY})^2}}$$

$$\text{DMOY} = \frac{\sum_{k=0}^{M-1} d_o(k\lambda)}{M}$$

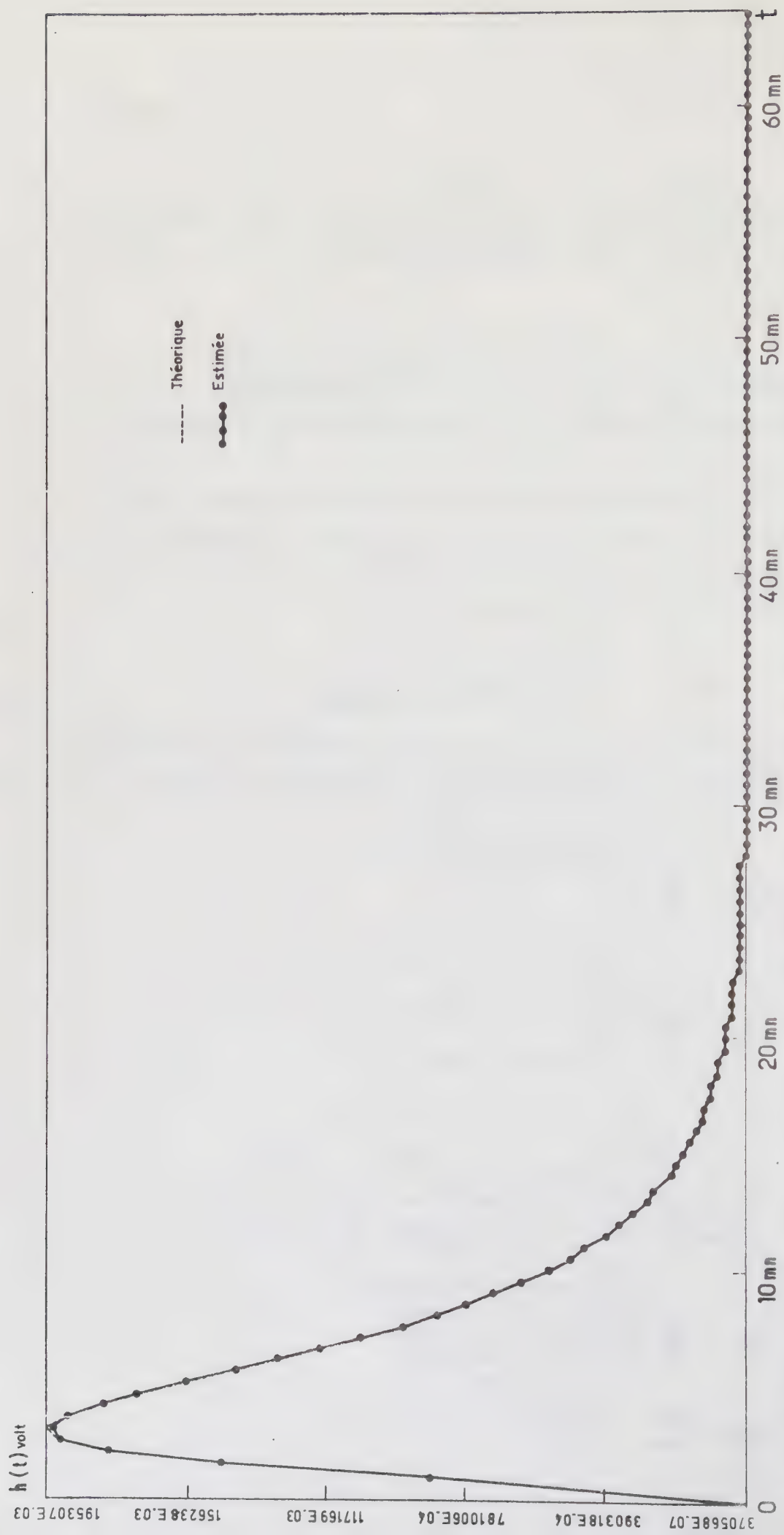


Fig. IV, 4. Réponses impulsionnelles théorique et estimée du modèle simulé $k_b=0\%$

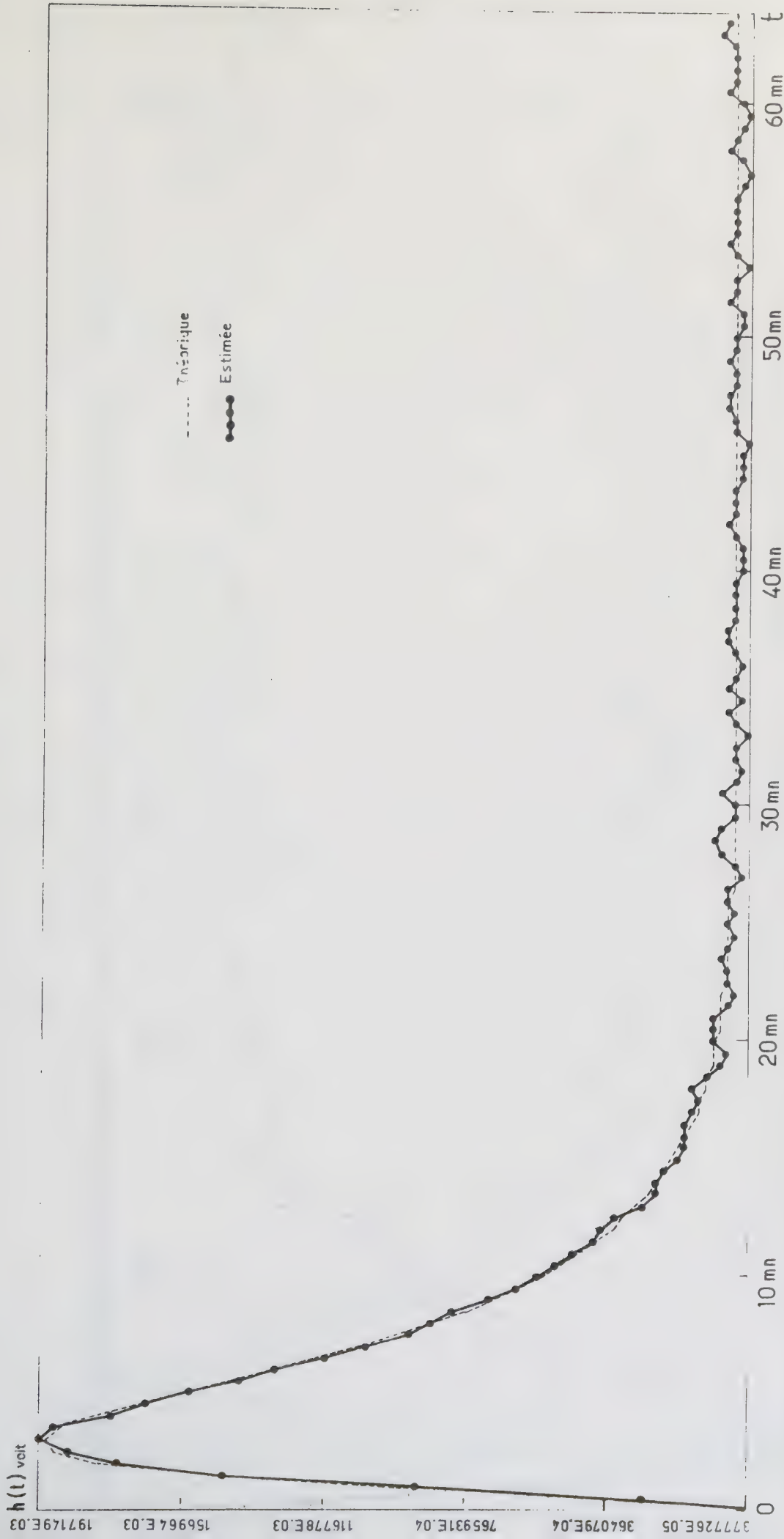


Fig.IV,5-Réponses impulsionnelles théorique et estimée du modèle simulé $k_F=6,4\%$,

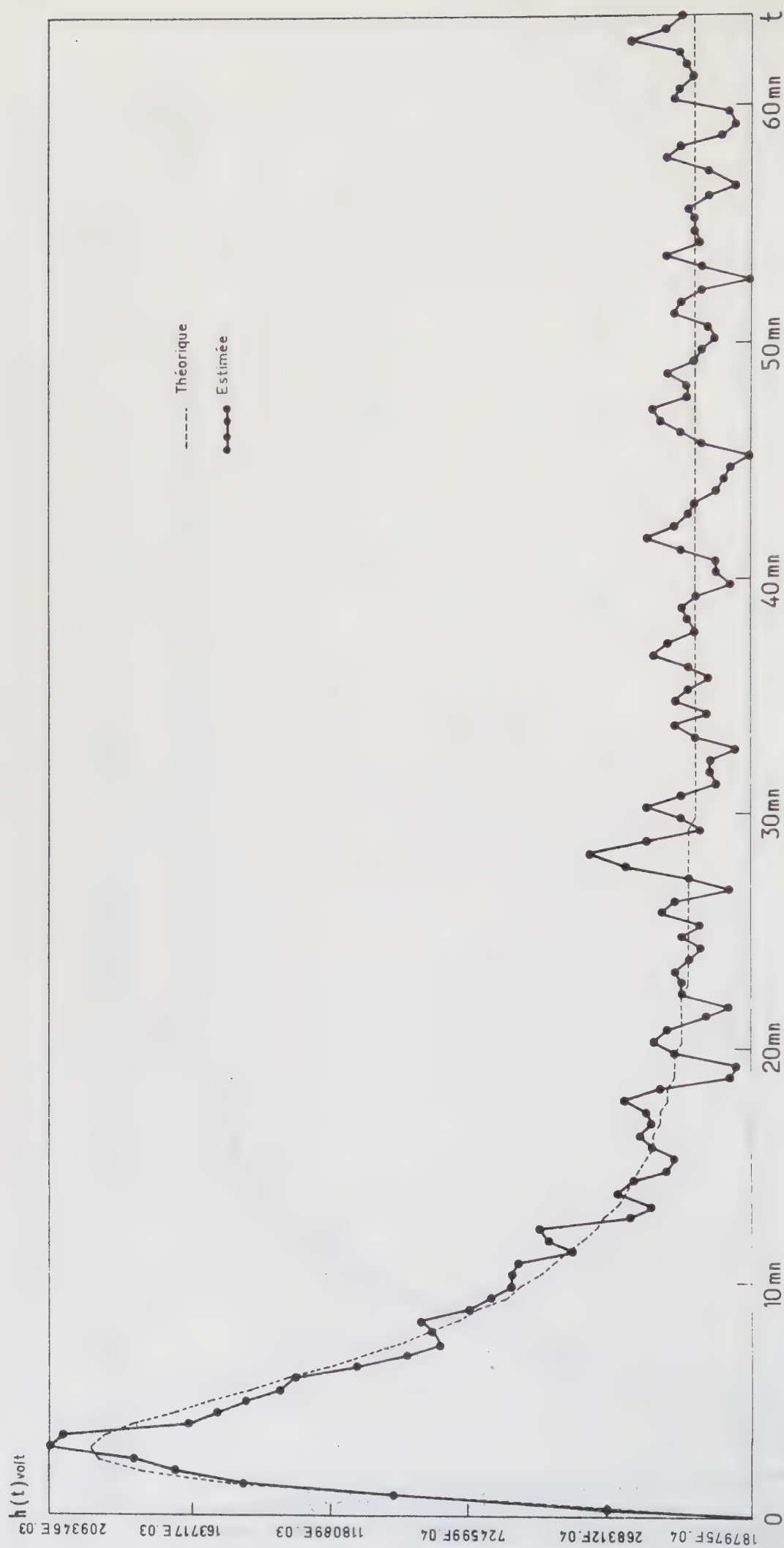


Fig.IV,6. Réponses impulsionnelles théorique et estimée du modèle simulé $k_b=31,8\%$

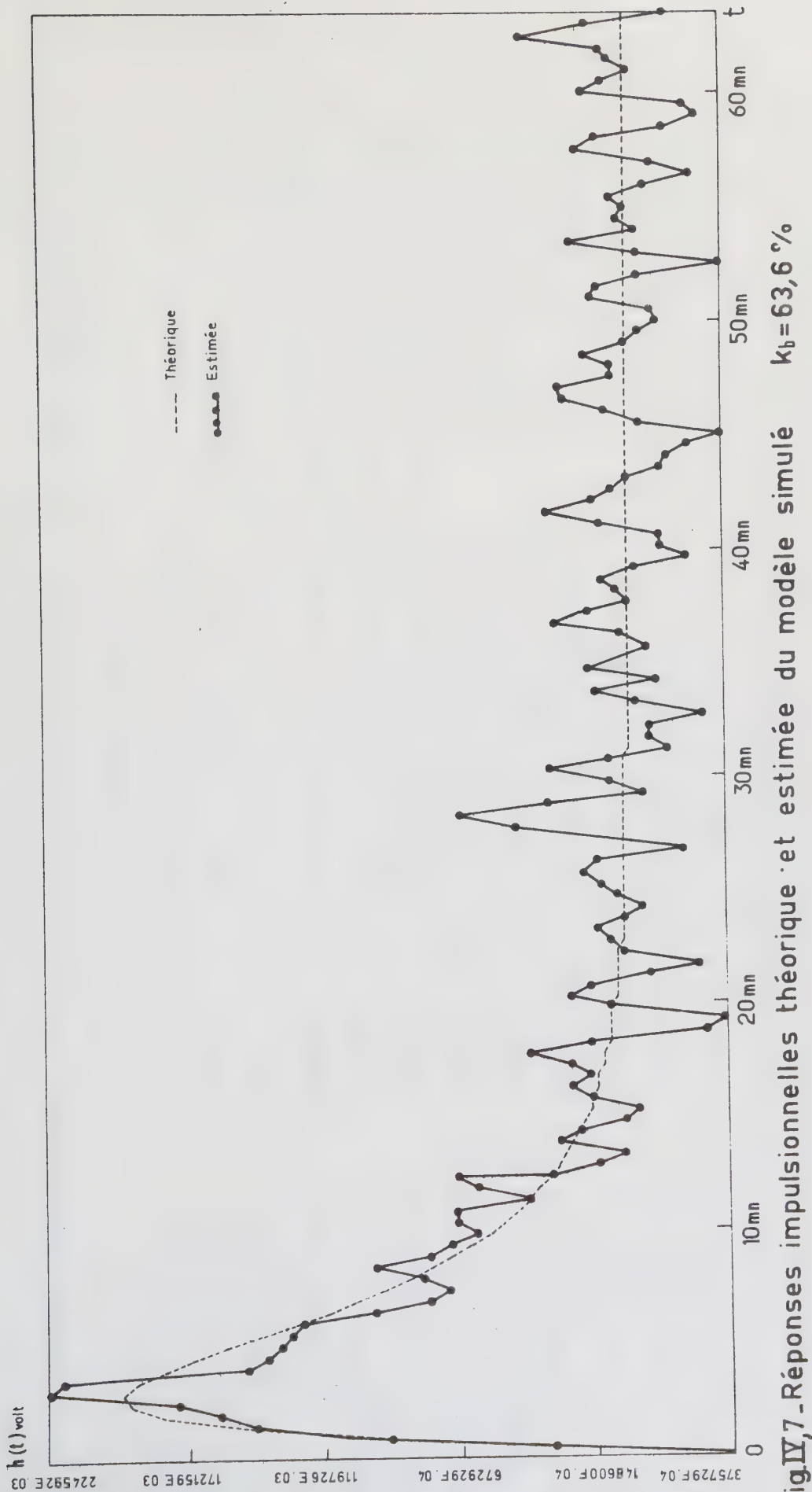


Fig. IV, 7. Réponses impulsionnelles théorique et estimée du modèle simulé

$k_b \%$	W_1	$W_2 \%$	Modèle en p estimé	$W_3 \%$	$W_4 \%$
0	$.764 \cdot 10^{-6}$	1,55	$.8543 \text{ E} - 01 \times (1 + 360.7 \text{ p} + .1997 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	6.70	6.57
6,4	$.201 \cdot 10^{-5}$	4,07	$.8467 \text{ E} - 01 \times (1 + 354.6 \text{ p} + .1976 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	7.13	6.54
12,7	$.383 \cdot 10^{-5}$	7,76	$.8603 \text{ E} - 01 \times (1 + 350.8 \text{ p} + .2128 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	7.84	3.36
19,1	$.569 \cdot 10^{-5}$	11,6	$.8464 \text{ E} - 01 \times (1 + 353.8 \text{ p} + .1967 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	12.3	6.53
25,4	$.756 \cdot 10^{-5}$	15,4	$.8239 \text{ E} - 01 \times (1 + 358.7 \text{ p} + .1777 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	17.4	11.1
31,8	$.946 \cdot 10^{-5}$	19,2	$.8090 \text{ E} - 01 \times (1 + 361.1 \text{ p} + .1640 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	21.8	14.1
38,2	$.113 \cdot 10^{-4}$	23,0	$.8199 \text{ E} - 01 \times (1 + 351.5 \text{ p} + .1817 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	23.6	10.2
44,5	$.131 \cdot 10^{-4}$	26,9	$(.8110 \text{ E} - 01 + .1584 \text{ E} - 03 \text{ p}) (1 + 352.4 \text{ p} + .1839 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	27.2	11.0
50,9	$.150 \cdot 10^{-4}$	30,7	$(.7704 \text{ E} - 01 + .1140 \text{ E} - 03 \text{ p}) (1 + 337.8 \text{ p} + .1689 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	32.0	14.9
57,3	$.169 \cdot 10^{-4}$	34,5	$(.8029 \text{ E} - 01 + .3186 \text{ E} - 05 \text{ p}) (1 + 359.2 \text{ p} + .1368 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	36.1	17.5
63,6	$.188 \cdot 10^{-4}$	38,4	$(.7851 \text{ E} - 01) (1 + 355.3 \text{ p} + .1407 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	39.7	18.4
70,0	$.206 \cdot 10^{-4}$	42,2	$(.7508 \text{ E} - 01 + .2909 \text{ E} - 05 \text{ p}) (1 + 347.3 \text{ p} + .1249 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	44.5	22.2

Tableau (IV,1)

Identification à partir de la réponse impulsionnelle obtenue par corrélation du système simulé

$$T(p) = .8770\text{E} - 01 \times (1 + 345.5 \text{ p} + .2223 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$$

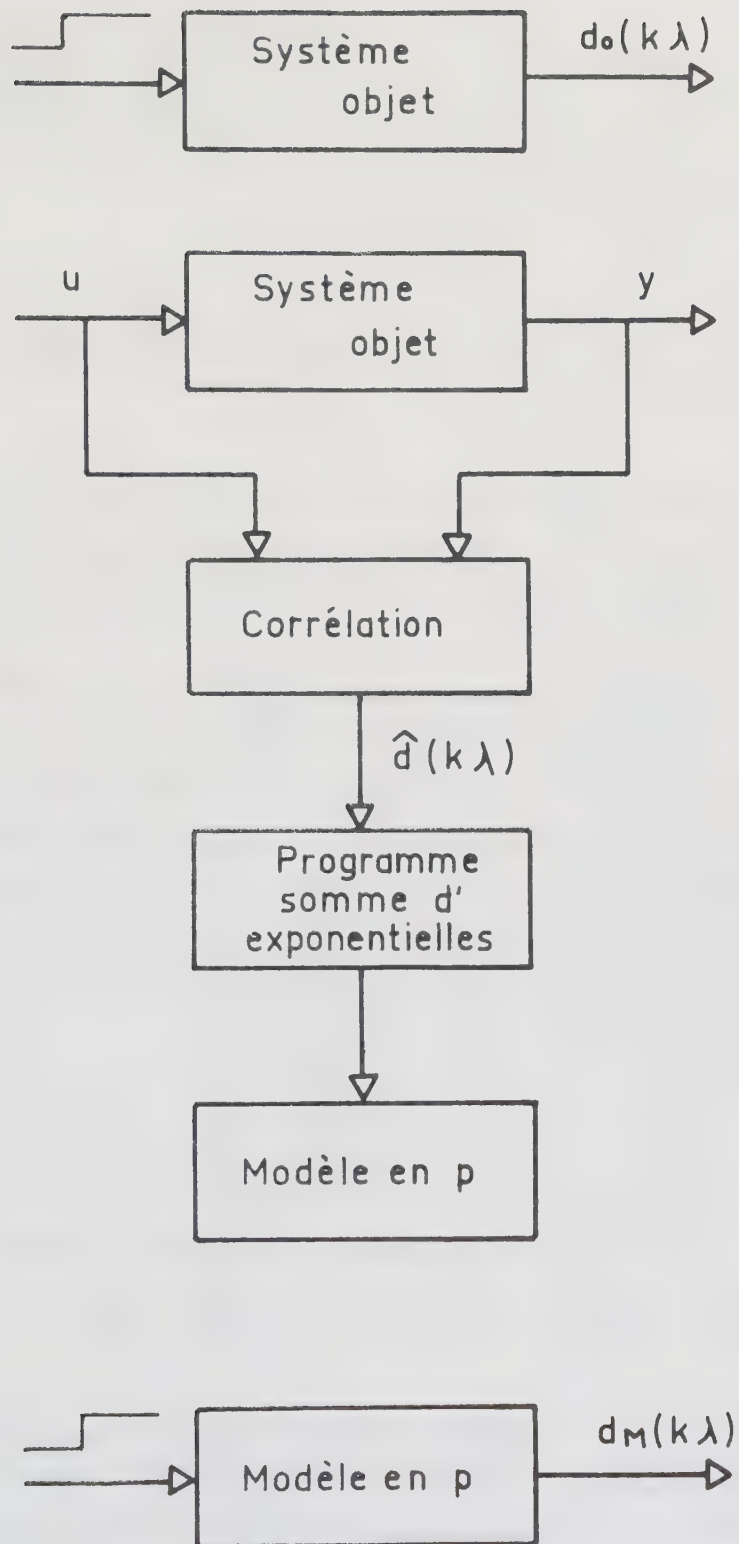


Fig. IV,8

Le biais est systématiquement supprimé en retranchant à chaque point de la séquence de pondération la quantité $\frac{M_e}{UECH}$. Cette quantité est calculée en faisant la moyenne des soixante derniers points de la séquence de pondération.

Sur les figures IV,9 ; IV,10 ; IV,11 ; IV,12 ; sont représentées les réponses indicielles théoriques et estimées pour $k_b = 0 \%$, 6,4 %, 31,8 %, 63,6 %.

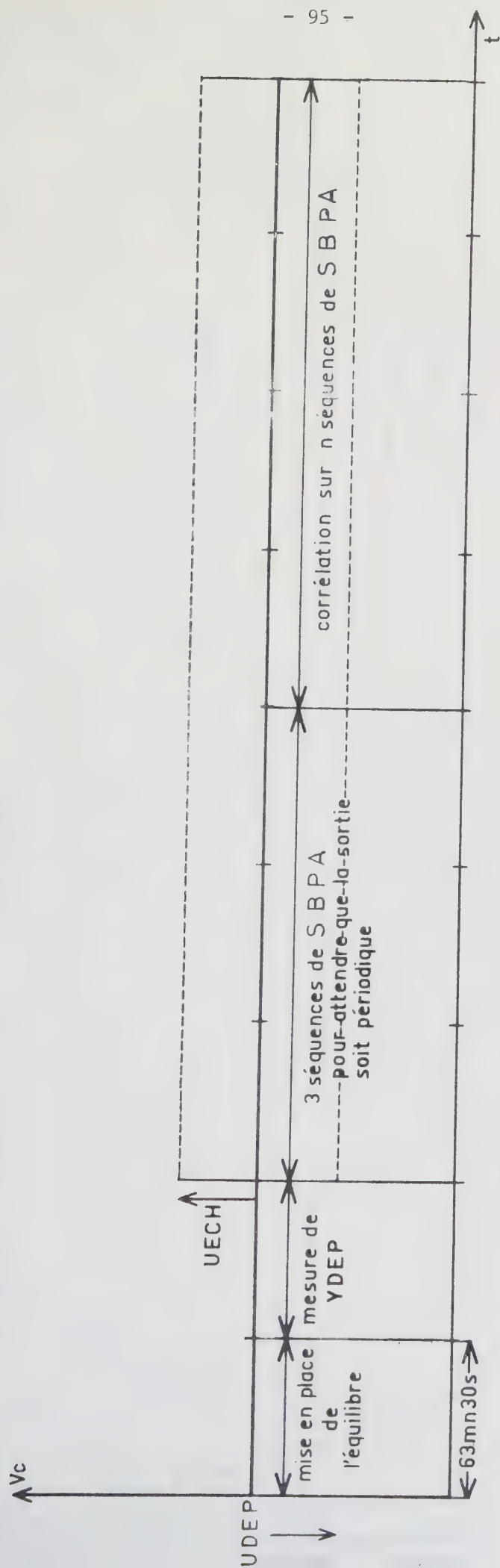
Sur le tableau (IV,2) sont indiqués pour chaque valeur de k_b les critères W_1, W_2, W_3, W_4 ainsi que le modèle en p déduit de la réponse indicielle estimée à partir du programme somme d'exponentielles.

On constate que les réponses indicielles estimées sont beaucoup moins bruitées que les réponses impulsionnelles estimées obtenues précédemment ; mais les points des réponses indicielles sont entachées d'un biais qui peut être important. ce biais théoriquement inexistant provient de l'erreur ΔM_e qui est faite sur la détermination de M_e à partir de la séquence de pondération ; ce biais proportionnel à l'indice du point de la réponse indicielle considéré peut être non négligeable pour les derniers points de la réponse indicielle.

IV - 4 - 2 - IDENTIFICATION DU PROCESSUS HYDRAULIQUE -

On excite le système pour une SBPA de période 127, de $\lambda = 30$ s
On identifie le système autour du point d'équilibre correspondant à $U_{DEP} = 3,06$ V.

Le régime permanent établi, on mesure Y_{DEP} en faisant la moyenne sur 127 mesures espacées de 30 s. Puis après 3 séquences de SBPA qui sont nécessaires pour que $y(t)$ soit périodique en fait la corrélation sur un certain nombre de séquences n_s de SBPA pour améliorer le rapport signal sur bruit. (fig. IV,13)



Excitation du processus dans la méthode
d'identification par corrélation
Fig. IV, 13

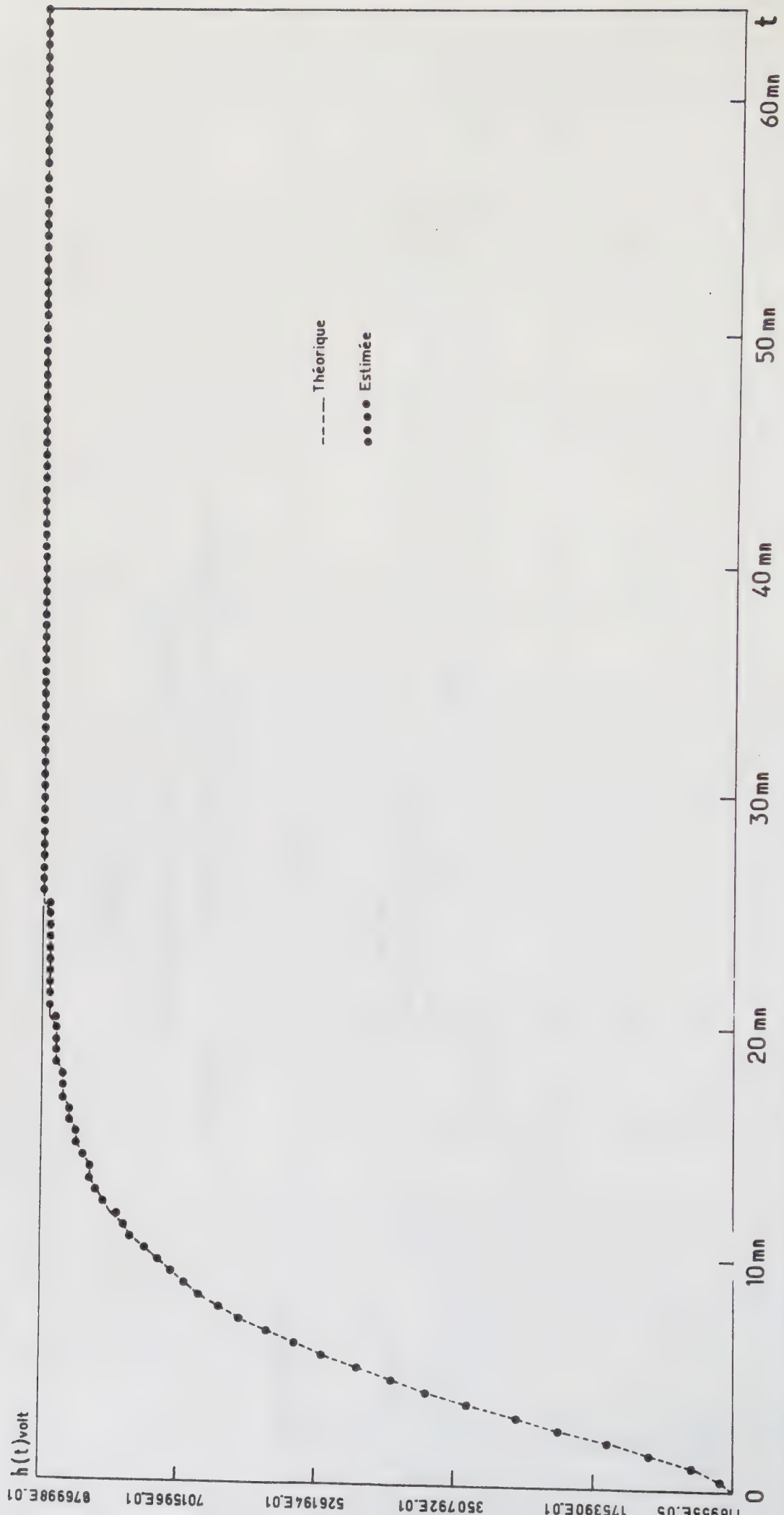


Fig.IV,9 - Réponses indicielles théorique et estimée du modèle simulé $k_b = 0\%$

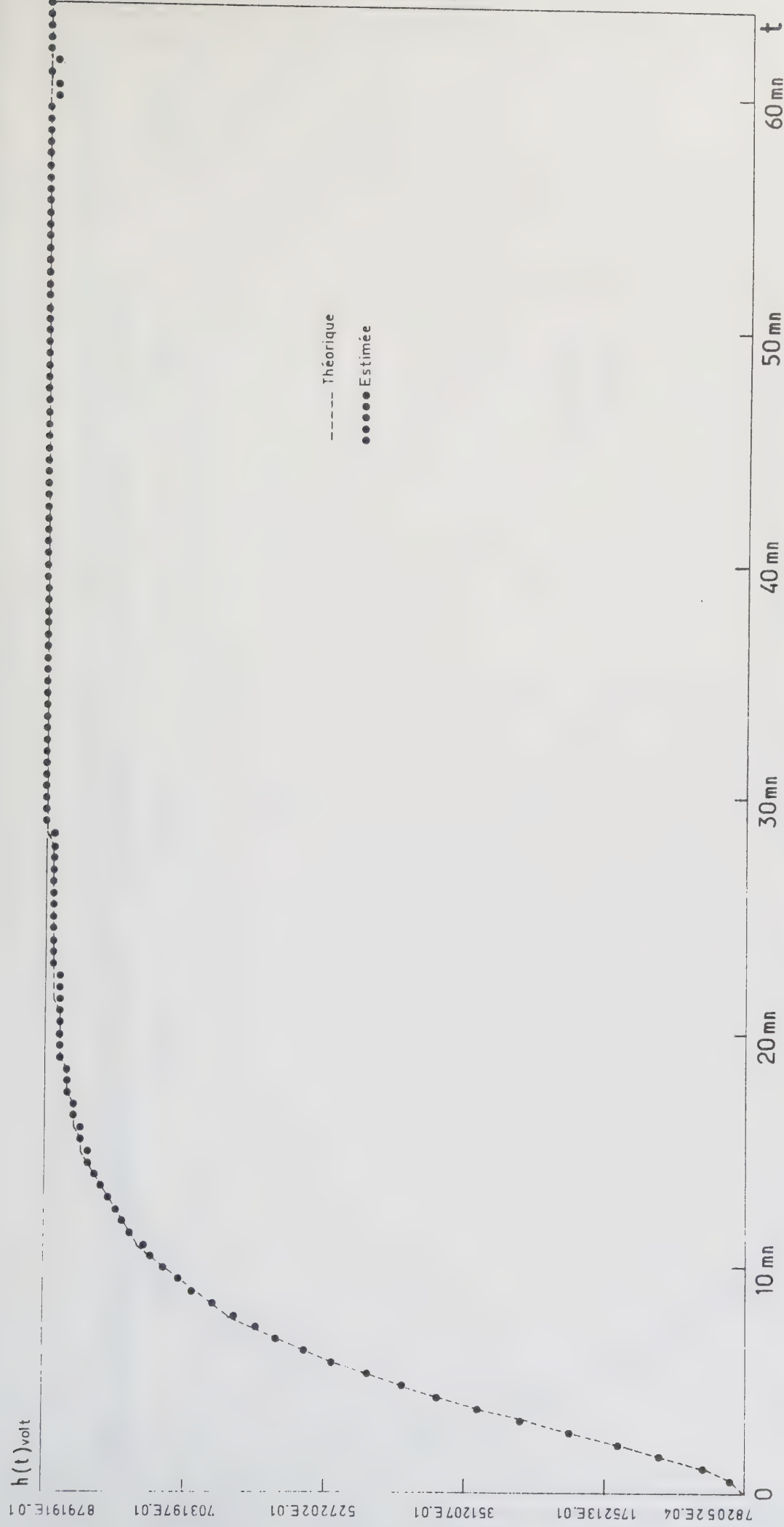


Fig.IV.10 _ Réponses indicielles théorique et estimée du modèle simulé $k_b = 6,4 \%$

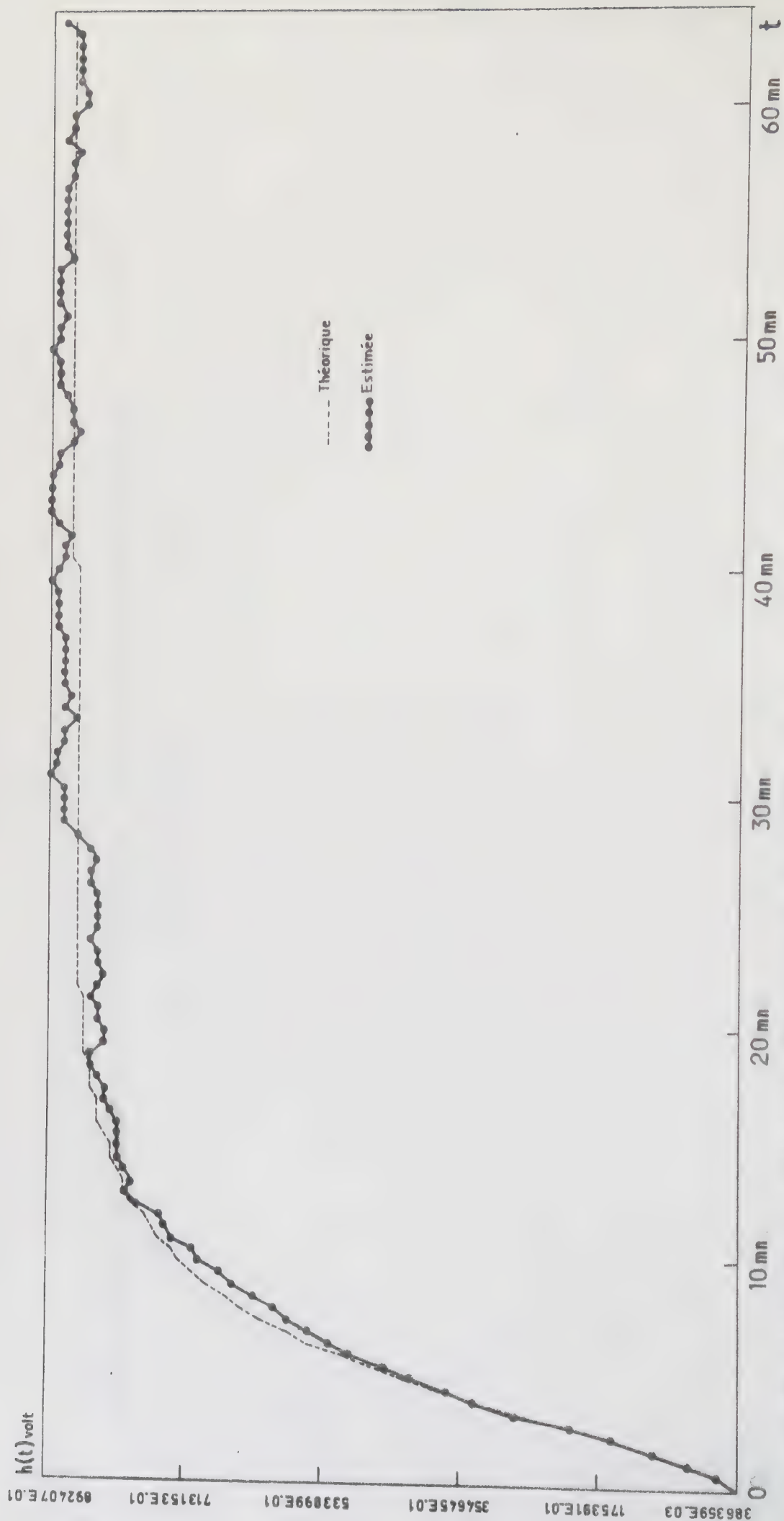


Fig. IV11- Réponses indicielles théorique et estimée du modèle simulé $k_b = 31,8\%$

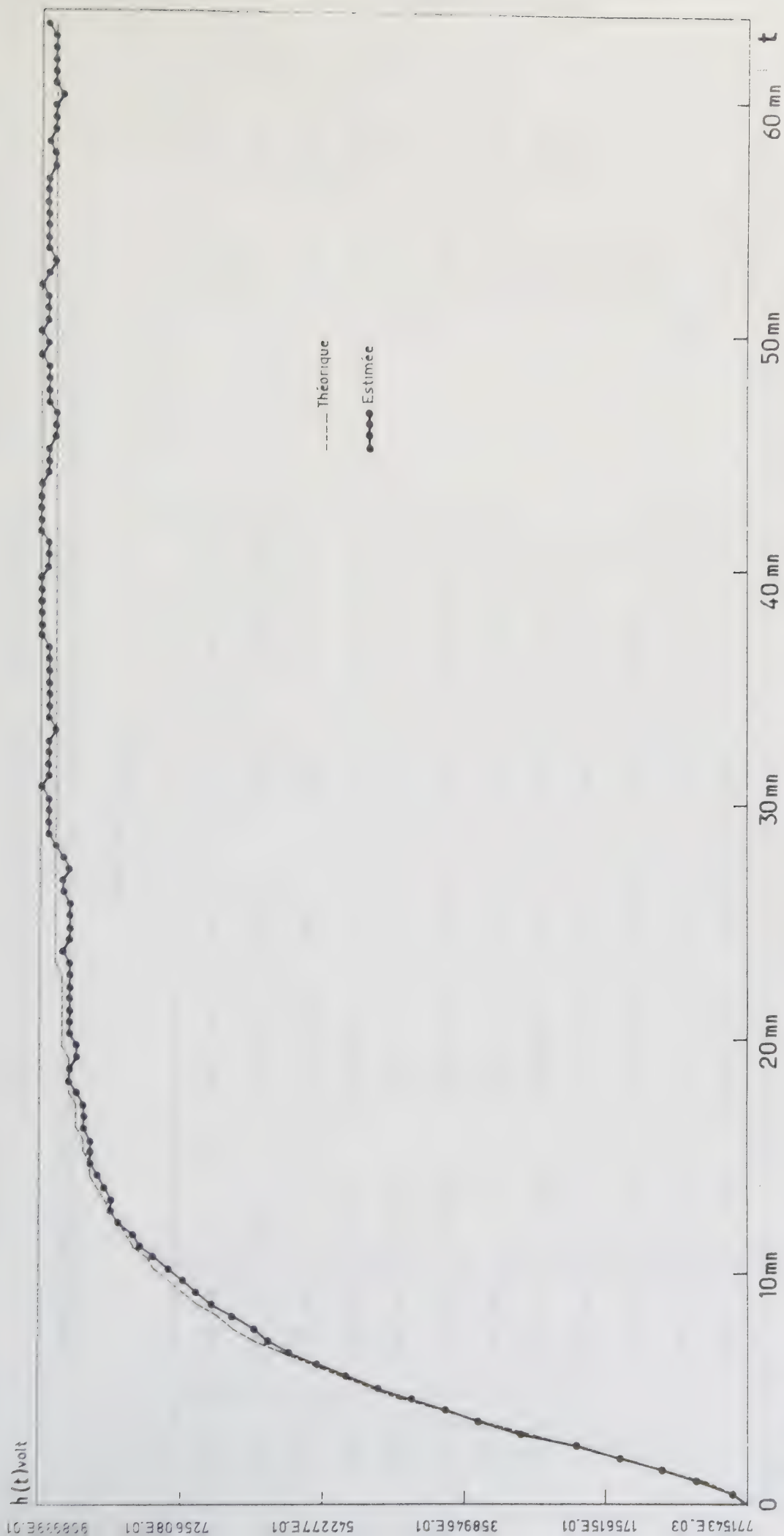


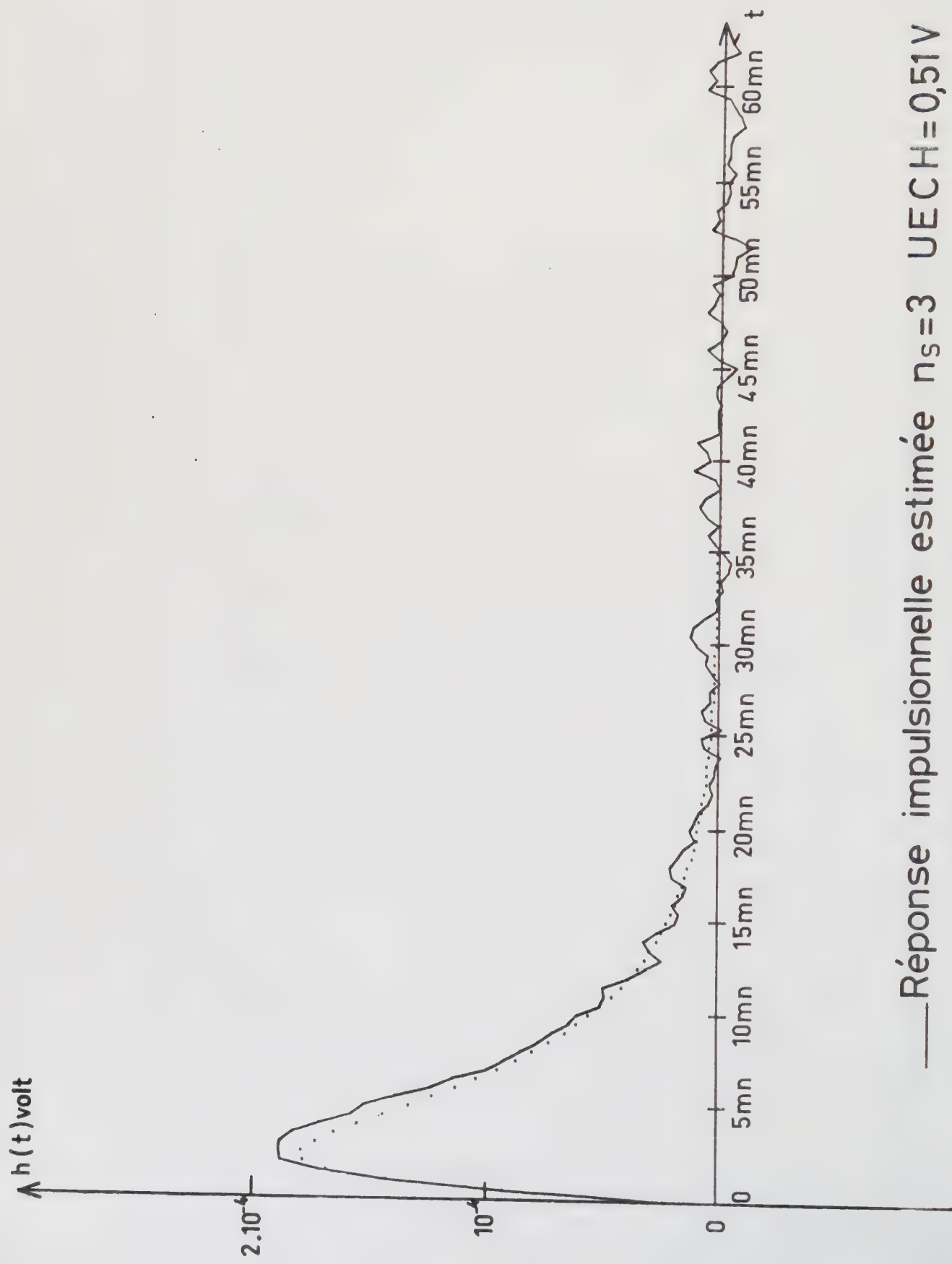
Fig.IV,12_ Réponses indicielles théorique et estimée du modèle simulé $k_b = 63,6 \%$

$k_b \%$	W_1	$W_2 \%$	Modèle en p estimé	$W_3 \%$	$W_4 \%$
0	$.892 \cdot 10^{-4}$	.493	$(.8759 \text{ E-01} - .1810 \text{ p}) (1 + 344.3 \text{ p} + .2161 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	.388	.674
6,4	$.190 \cdot 10^{-3}$	1.05	$(.8752 \text{ E-01} - .3103 \text{ p}) (1 + 345.3 \text{ p} + .2103 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	1.26	1.40
12,7	$.379 \cdot 10^{-3}$	2.09	$(.8750 \text{ E-01} - .3773 \text{ p}) (1 + 346.7 \text{ p} + .2061 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	2.15	1.89
19,1	$.574 \cdot 10^{-3}$	3.17	$(.8752 \text{ E-01} - .3838 \text{ p}) (1 + 348.6 \text{ p} + .2031 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	3.00	2.26
25,4	$.771 \cdot 10^{-3}$	4.26	$(.8863 \text{ E-01} + 1.560 \text{ p}) (1 + 365.8 \text{ p} + .2711 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	5.80	4.68
31,8	$.969 \cdot 10^{-3}$	5.35	$(.8763 \text{ E-01} - .3310 \text{ p}) (1 + 353.1 \text{ p} + .1996 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	4.56	2.75
38,2	$.117 \cdot 10^{-2}$	6.45	$(.8907 \text{ E-01} + 2.568 \text{ p}) (1 + 377.1 \text{ p} + .2976 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	8.65	7.01
44,5	$.136 \cdot 10^{-2}$	7.55	$(.8905 \text{ E-01} + 2.389 \text{ p}) (1 + 376.6 \text{ p} + .2903 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	8.99	6.78
50,9	$.156 \cdot 10^{-2}$	8.64	$(.8877 \text{ E-01} + 2.013 \text{ p}) (1 + 376.5 \text{ p} + .2926 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	8.42	5.26
57,3	$.176 \cdot 10^{-2}$	9.74	$(.8895 \text{ E-01} + 2.948 \text{ p}) (1 + 384.8 \text{ p} + .3061 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	10.0	6.44
63,6	$.196 \cdot 10^{-2}$	10.8	$(.8952 \text{ E-01} + 2.961 \text{ p}) (1 + 386.5 \text{ p} + .3136 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	12.1	8.91
70,0	$.216 \cdot 10^{-2}$	11.9	$(.8963 \text{ E-01} + 4.064 \text{ p}) (1 + 397.6 \text{ p} + .3464 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$	13.4	9.72

Tableau (IV,2)

Identification à partir de la réponse indicielle obtenue par corrélation du système simulé

$$T(p) = .8770E - 01 \times (1 + 345.5 \text{ p} + .2223 \text{ E } 05 \text{ p}^2)^{-1}$$



— Réponse impulsionnelle estimée $n_s=3$ $UECH=0,51V$

..... Réponse impulsionnelle du modèle $.8828E_{-01}(1+395.3p+.2259E05p^2)^{-1}$

Fig. IV 17

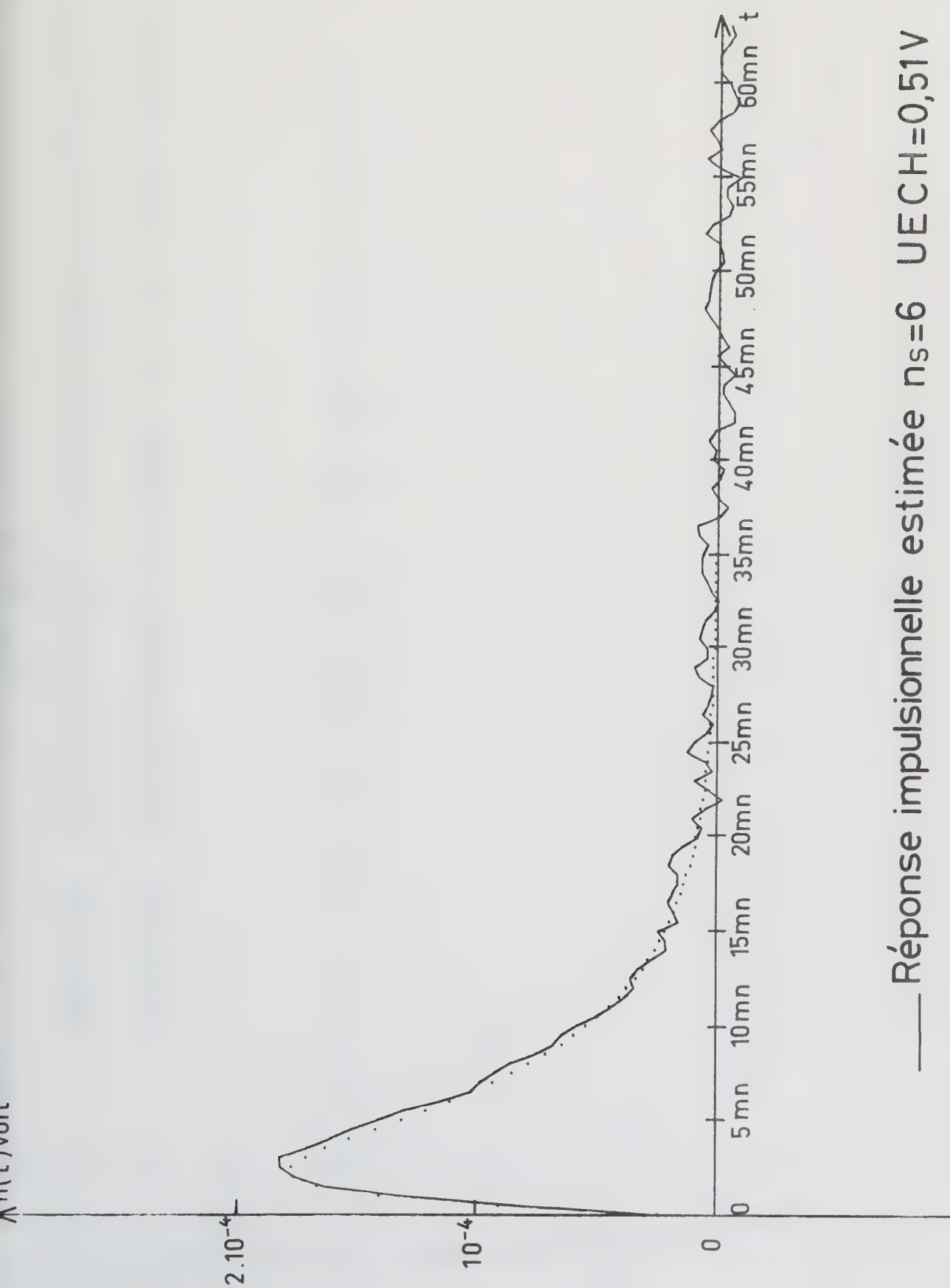
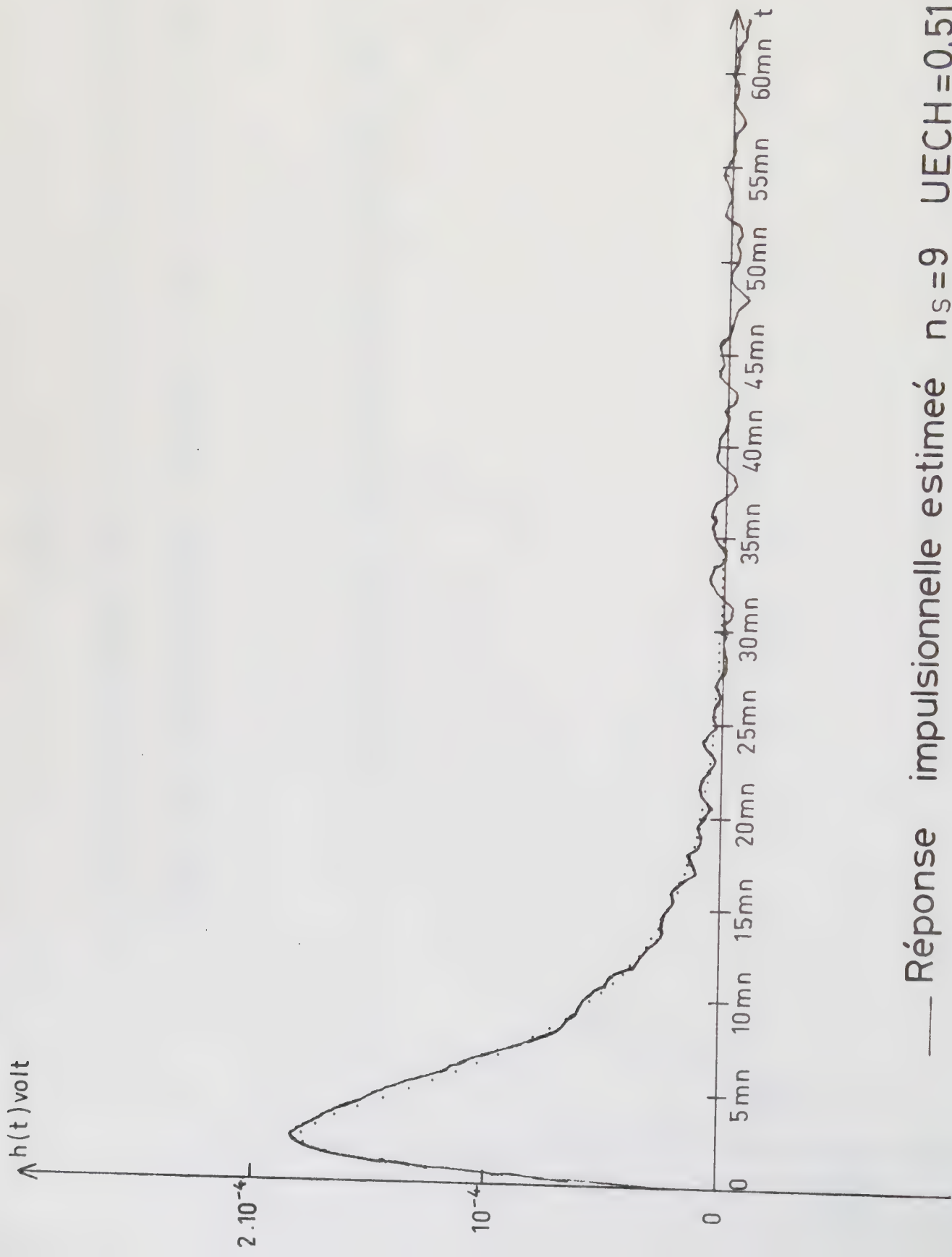


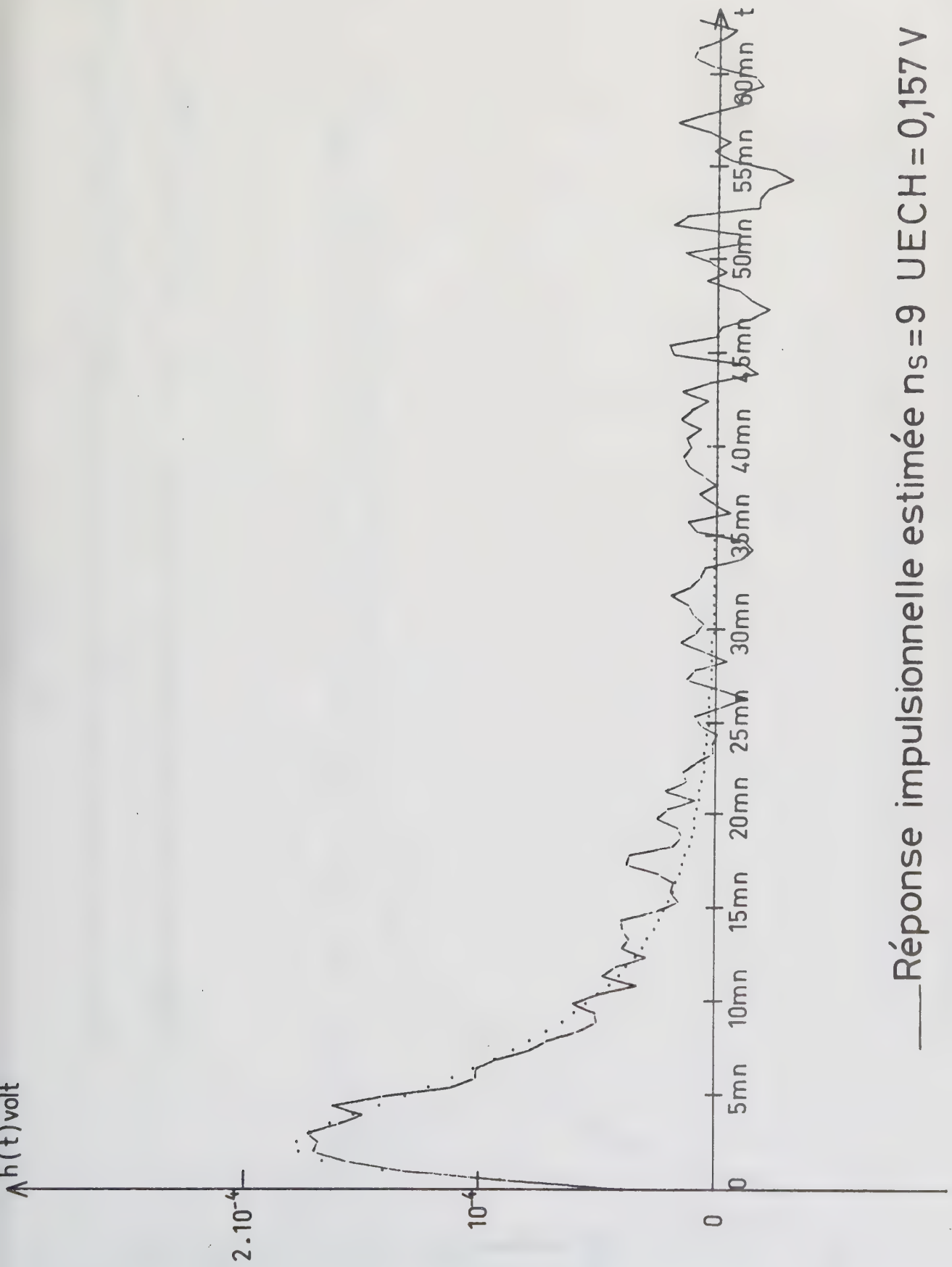
Fig. IV, 15



— Réponse impulsionnelle estimée $n_s=9$ $UECH=0,51$ V

..... Réponse impulsionnelle du modèle $.8828E_{-01}(1+395.3p+2259E_{05}p^2)^{-1}$

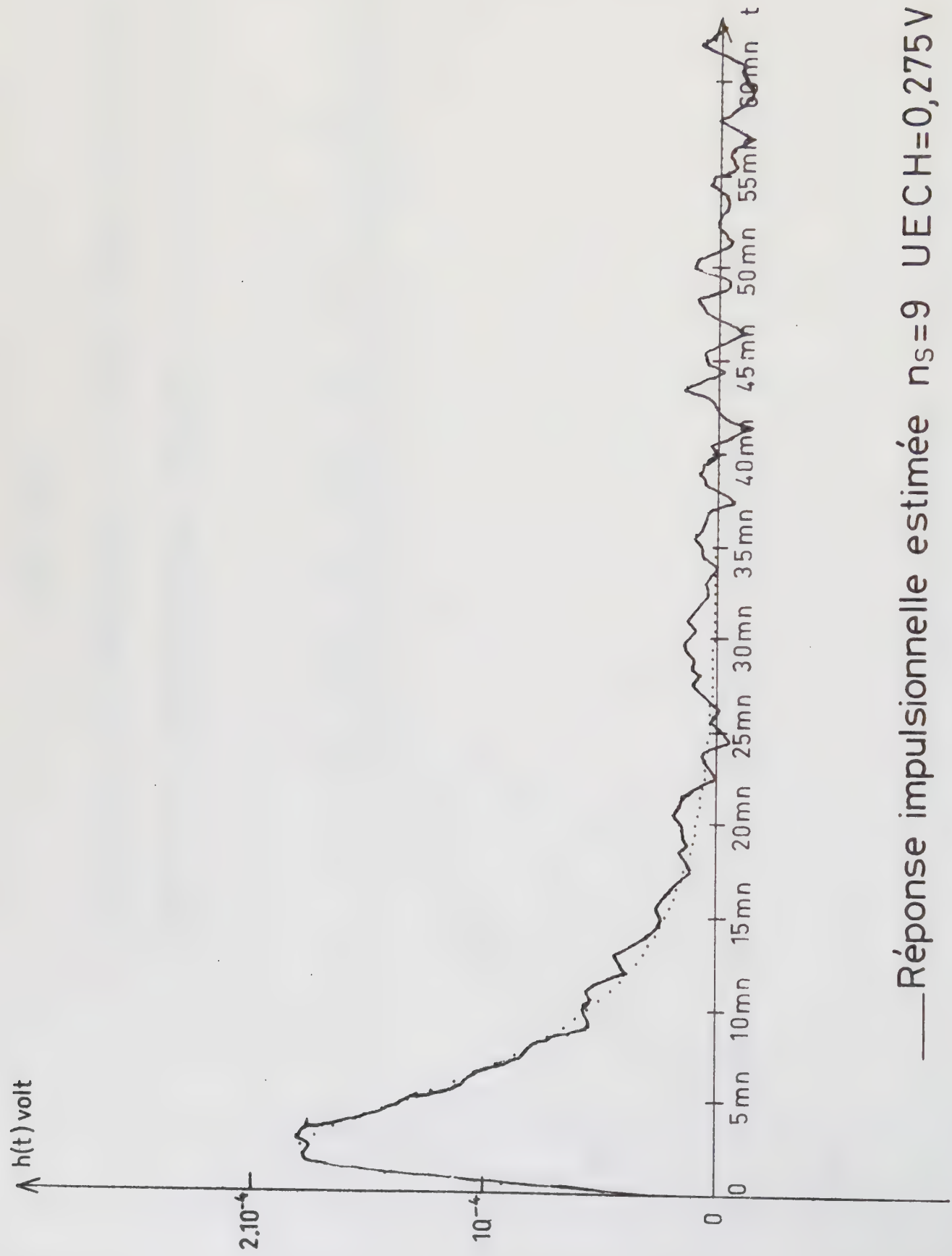
Fig. IV 16



— Réponse impulsionnelle estimée $n_s=9$ $UECH=0,157\text{ V}$

..... Réponse impulsionnelle du modèle $.8828E_{-01}(1+395.3p+2259E05p^2)^{-1}$

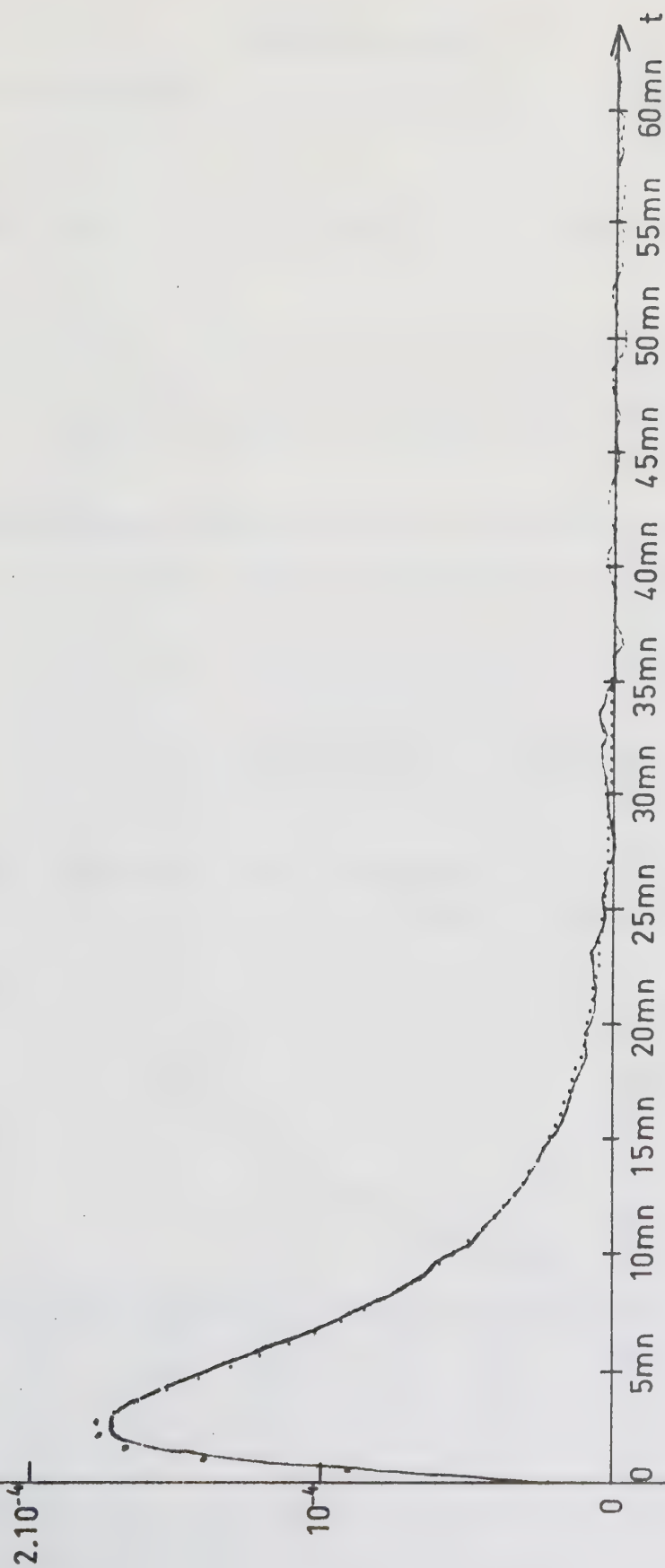
Fig. IV,17



— Réponse impulsionnelle estimée $n_s=9$ $UECH=0,275V$

..... Réponse impulsionnelle du modèle $.8828E_{-01}(1+395.3p+2259E05p^2)^{-1}$

Fig. IV,18



— Réponse impulsionnelle estimée $n_s=9$ $UECH=1,02V$

..... Réponse impulsionnelle du modèle. $8828E_{-01}(1+395.3p+.2259E05p^2)^{-1}$

Fig. IV,19

IV - 4 - 2 - 2 - REPONSE INDICIELLE

On étudie tout d'abord la qualité de l'identification suivant l'amplitude de UECH.

On choisit UECH = 0,157 V ; 0,275 V ; 0,51 V ; 0,102 V (avec $n_s = 9$).

Sur la figure IV,20 on constate une légère amélioration de l'identification lorsque UECH croît de 0,157 V à 0,275 V ; 0,51 V ; 0,102 V. On remarque la grande dispersion des valeurs finales.

On retient comme dans le cas de la réponse impulsionnelle comme courbe définitive celle correspondant à UECH = 0,51 V.

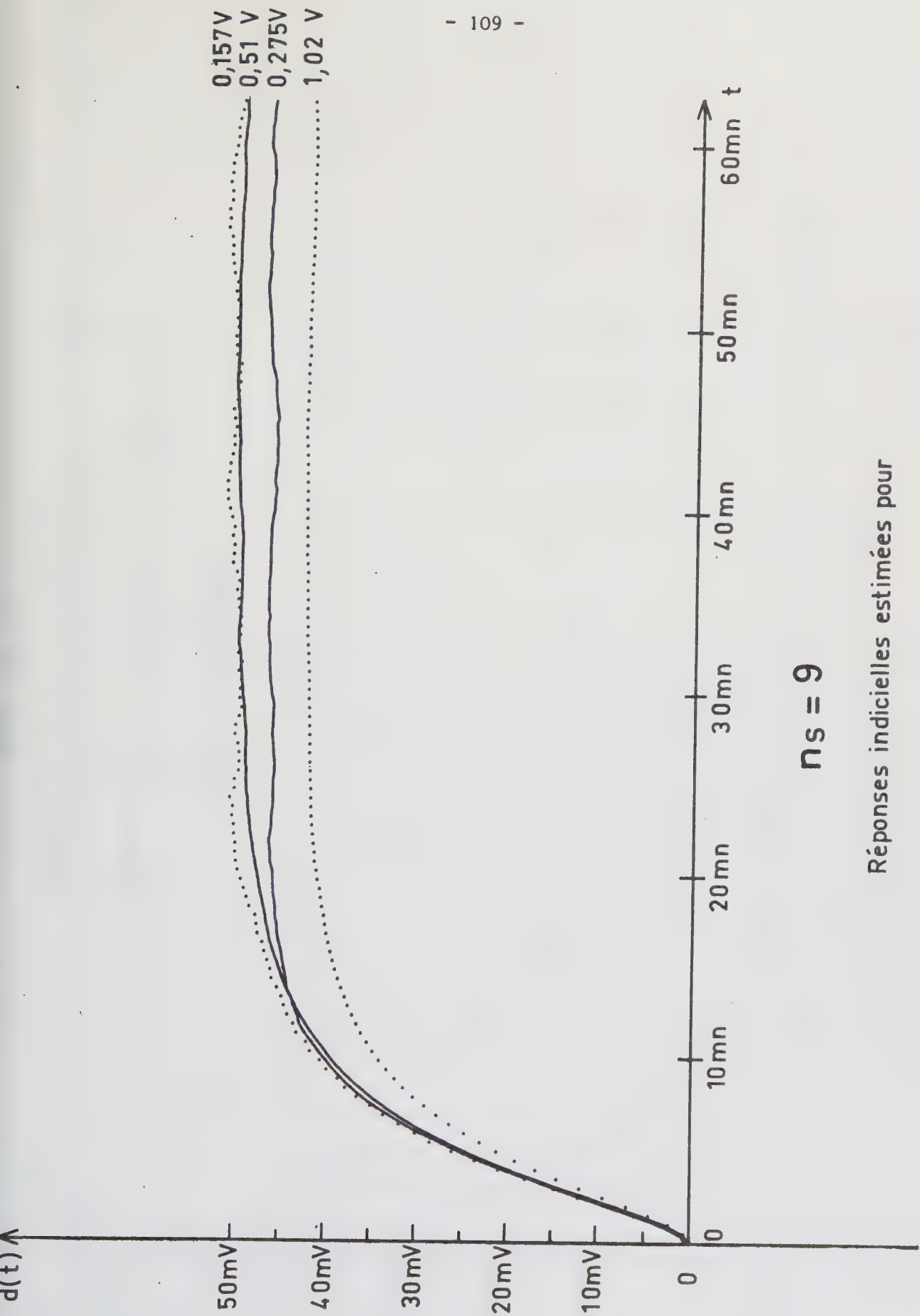
Le modèle en p estimé est le suivant :

$$T(p) = \frac{.9977 \text{ E } - 01 - 1.058p}{1. + 396.9p + .1933 \text{ E } 05p^2}$$

La qualité de cette identification est reflétée par la figure IV,21 ainsi que les critères suivants :

$$W_1 = .625 \text{ E } - 04$$

$$W_2 = 3.26 \text{ \%}.$$

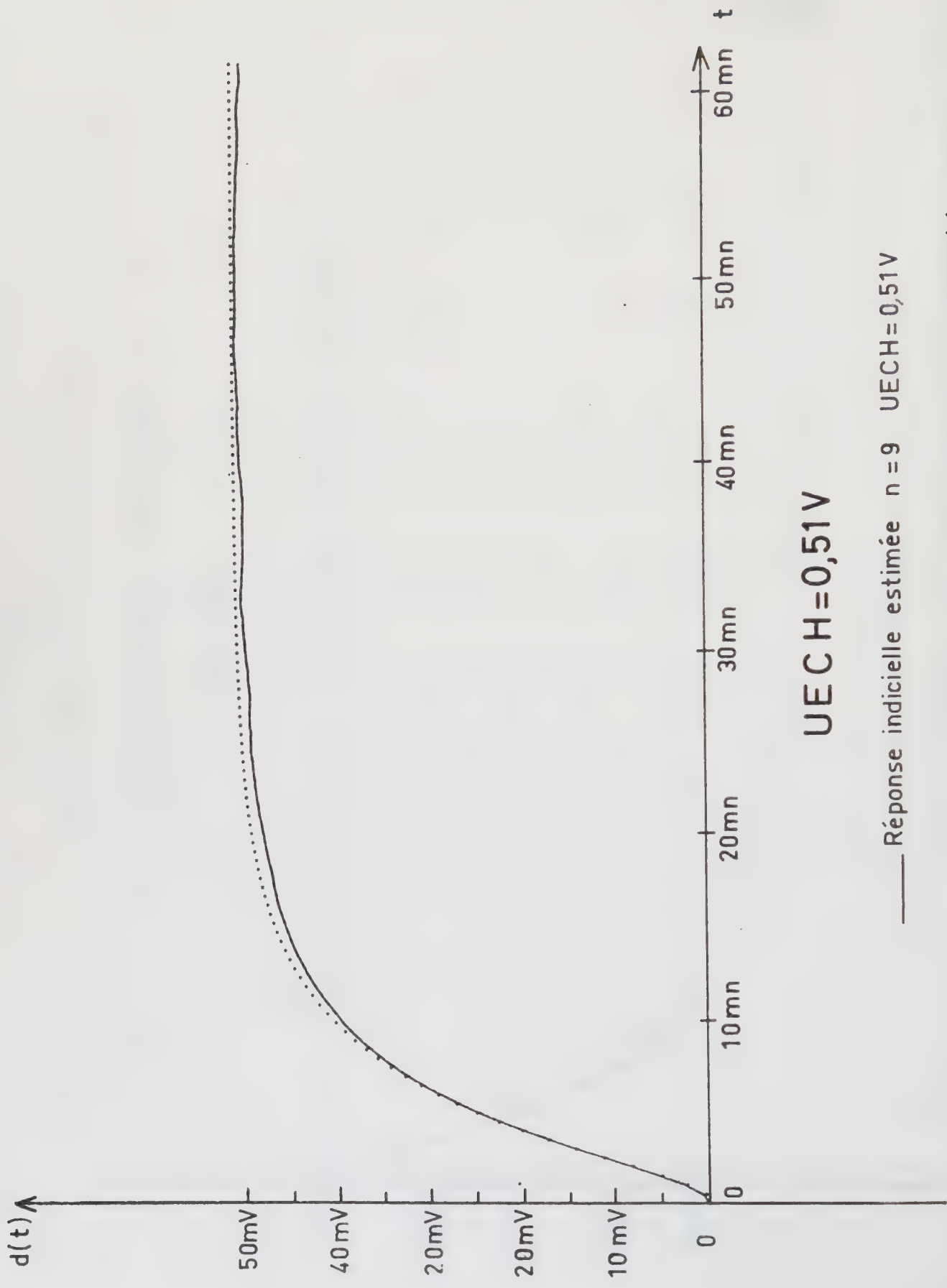


$n_s = 9$

Réponses indicielles estimées pour

UECH = 0,157 V ; 0,275 V ; 0,51 V ; 1,02 V

Fig. IV, 20



UECH=0,51V

_____ Réponse indicielle estimée $n=9$ UECH=0,51V

..... Réponse indicielle du modèle $(9977E-01-1.058p)(1+396.9p+.1933E05p^2)^{-1}$

Fig IV 21

CHAPITRE V

Comparaison des différentes méthodes d'identification employées

Méthodes successivement employées	
1	Identification graphique par décomposition en somme d'exponentielles de la réponse indicielle.
2	Identification par programme décomposition en somme d'exponentielles de la réponse indicielle.
3	Identification par la méthode des moindres carrés améliorée par K. STEIGLITZ et L.E. Mac BRIDE.
4	Corrélation suivie de la décomposition en somme d'exponentielles de la réponse impulsionnelle.
5	Corrélation suivie de la décomposition en somme d'exponentielles de la réponse indicielle.

Les méthodes précédentes donnent un modèle en p ou z . On va d'abord calculer le modèle associé en p ou z à chaque modèle en z ou en p ; puis on compare les sorties des différents modèles à une même entrée avec une sortie expérimentale correspondant à la même entrée ; ensuite sont comparées les mises en oeuvre de chaque méthode.

IV - 1 - PASSAGE DU MODELE EN p AU MODELE EN z ET RECIPROQUEMENT

Reprenons la démonstration du § III,3,1.

Supposons $T(p)$ de la forme :

$$T(p) = \frac{K_1 + K_2 p}{(p + a)(p + b)}$$

Le modèle en z associé à cette transmittance $T(p)$ est représenté par :

$$G(z) = \frac{a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}$$

et réciproquement.

IV - 1 - 1 - PASSAGE DU MODELE EN p AU MODELE EN z

$a_1, a_2, b_1, b_2, a, b, K_1, K_2$ vérifient les relations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{K_1}{ab(b-a)} \left(b(1 - e^{-a\lambda}) - a(1 - e^{-b\lambda}) \right) + \frac{K_2}{b-a} (e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}) \quad (V,1) \\ a_2 = \frac{K_1}{ab(b-a)} \left(a e^{-a\lambda}(1 - e^{-b\lambda}) - b e^{-b\lambda}(1 - e^{-a\lambda}) \right) - \frac{K_2}{b-a} (e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}) \quad (V,2) \\ b_1 = -(e^{-a\lambda} + e^{-b\lambda}) \quad (V,3) \\ b_2 = + e^{-a\lambda} e^{-b\lambda} \quad (V,4) \end{array} \right.$$

V - 1 - 2 - PASSAGE DU MODELE en z AU MODELE EN p

De (V,3) et (V,4) on déduit que $e^{-a\lambda}$ et $e^{-b\lambda}$ sont racines de l'équation du deuxième degré

$$x^2 + b_1 x + b_2 = 0 \quad \text{donc}$$

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{\lambda} \operatorname{Log} \left(\frac{-b_1 + \sqrt{(b_1)^2 - 4b_2}}{2} \right) \\ b = -\frac{1}{\lambda} \operatorname{Log} \left(\frac{-b_1 - \sqrt{(b_1)^2 - 4b_2}}{2} \right) \end{cases}$$

On remplace a et b par leurs valeurs dans (V,1) et (V,2) ; K_1 et K_2 sont alors solutions d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

REMARQUE : Le terme K_2 obtenu peut être différent de zéro.

V - 1 - 3 - RESULTATS

Dans le tableau (V,1) sont exposés les modèles en p et en z associés correspondant à chaque méthode pour le point de fonctionnement $V_c = 3,06 \text{ V}$.

Les modèles en p et z trouvés ont des paramètres assez voisins ; physiquement on sait que le terme en p au numérateur de $T(p)$ est nul (en effet, la pente à l'origine de la courbe réponse à un échelon est nulle) ; seuls les modèles trouvés par les méthodes 1, 2, 4 répondent à cette condition.

V - 2 - COMPARAISON DES SORTIES DES DIFFERENTS MODELES A UNE MEME ENTREE AVEC UNE SORTIE EXPERIMENTALE CORRESPONDANT A LA MEME ENTREE

On prend successivement comme entrée un échelon d'amplitude $UECH = 0,51 \text{ V}$ et une SBPA d'amplitude $UECH = 0,275 \text{ V}$.

. Pour les réponses indicielles théoriques et expérimentales l'échantillonnage se fait sur 127 points toutes les $\Delta t = 30$ secondes.

. Pour les réponses à la SBPA de longueur $M\lambda$ ($M = 63$; $\lambda = 1$ mm). l'échantillonnage se fait sur 378 points toutes les $\Delta t = 10$ secondes.

Les enregistrements expérimentaux sont une moyenne de quatre enregistrements.

On calcule dans les deux cas le critère

$$W = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{M-1} (y_{th}(i) - y_{exp}(i))^2}{\sum_{i=0}^{M-1} (y_{exp}(i) - YMOY(i))^2}}$$

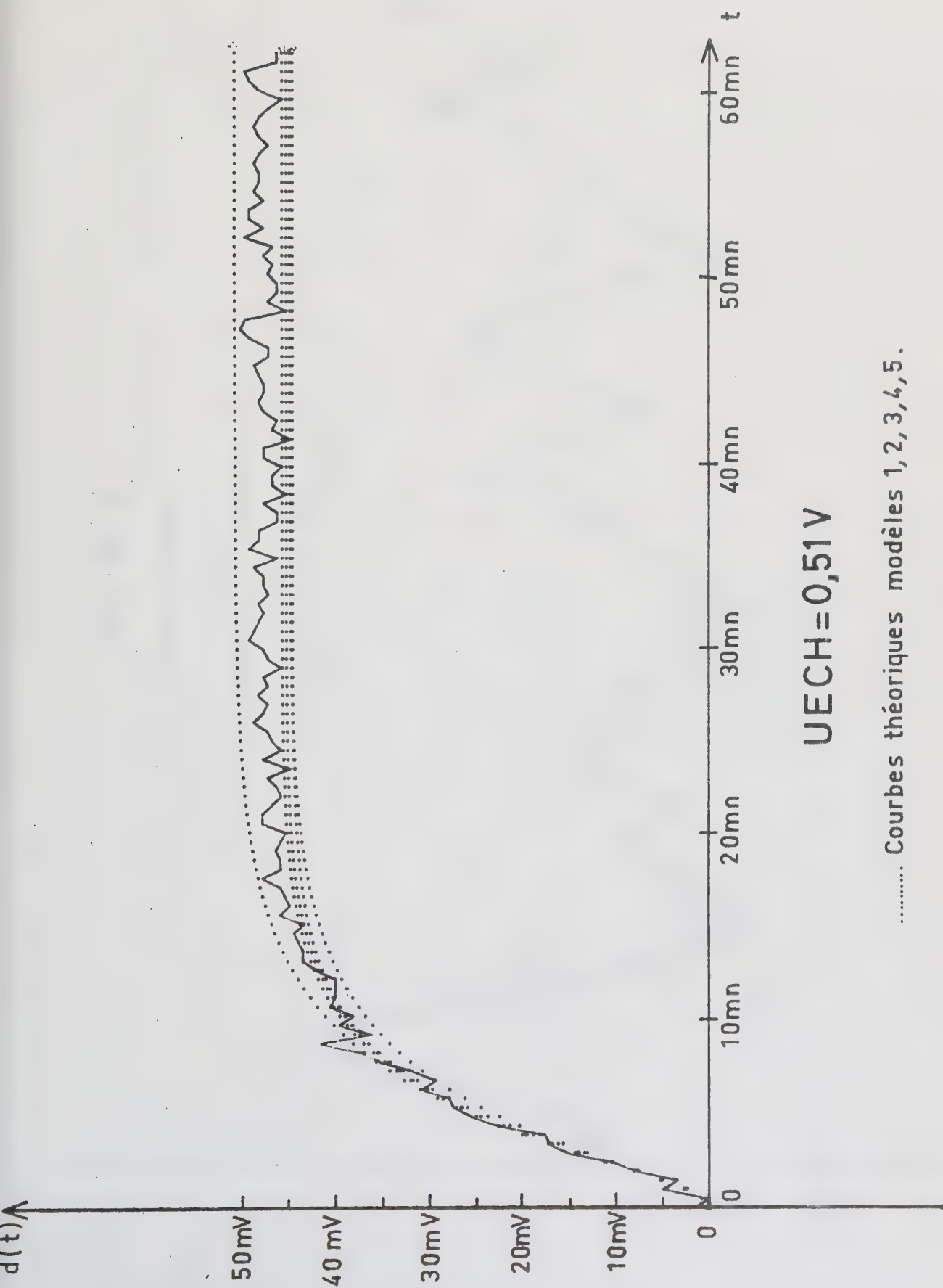
$$YMOY(i) = \frac{\sum_{i=0}^{M-1} y_{exp}(i)}{M}$$

$y_{th}(i)$ = réponse théorique à l'instant $i \Delta t$

$y_{exp}(i)$ = réponse expérimentale à l'instant $i \Delta t$.

Sur les figures V,1 ; V,2 sont tracées les réponses théoriques et expérimentales dans le cas d'un échelon et d'une SBPA comme entrées.

Sur le tableau(V,1) sont indiquées les valeurs du critère W pour chaque modèle, on voit que les méthodes sont équivalentes vis à vis de ce critère.



UECH = 0,51 V

..... Courbes théoriques modèles 1, 2, 3, 4, 5.

— Courbe expérimentale

Fig. V, 1

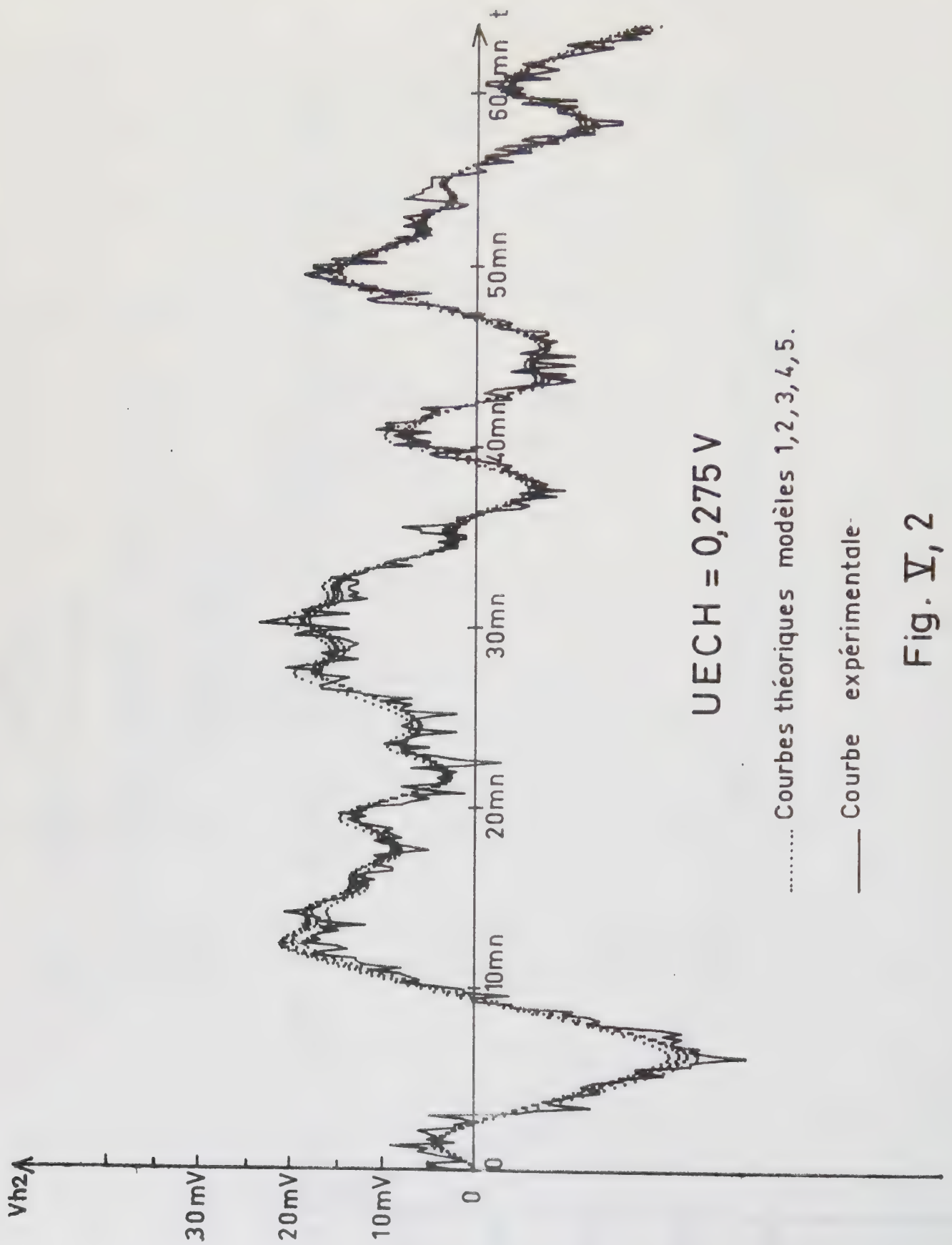


Fig. V, 2

Tableau (V, I) Récapitulation des modèles trouvés par les différentes méthodes dynamiques

METHODE	T(p)	G(z)	W % échelon	W % SBPA
1	$\frac{0,0899}{(1 + 264p)(1 + 89,8p)} = \frac{0,0899}{1 + 353,8p + 23\,707p^2}$ →	$\frac{0,180452E-03z^{-1} + 0,171695E-03z^{-2}}{1 - 1,85745z^{-1} + 0,861365z^{-2}}$ →	18,1	22,5
2	$\frac{0,0877}{(1 + 260p)(1 + 85,5p)} = \frac{0,0877}{1 + 345,5p + 22230p^2}$ →	$\frac{0,187352E-03z^{-1} + 0,177893E-03z^{-2}}{1 - 1,85189z^{-1} + 0,856055z^{-2}}$ →	25,8	22,7
3	$\frac{0,0890 + 0,272p}{(1 + 258p)(1 + 103p)} = \frac{0,0890 + 0,272p}{1 + 361p + 26574p^2}$ ←	$\frac{0,257173E-03z^{-1} + 0,574907E-04z^{-2}}{1 - 1,86903z^{-1} + 0,872567z^{-2}}$ ←	21,2	22,5
4	$\frac{0,0883}{(1 + 326p)(1 + 69,3p)} = \frac{0,0883}{1 + 395,3p + 22590p^2}$ →	$\frac{0,184441E-03z^{-1} + 0,173992E-03z^{-2}}{1 - 1,83542z^{-1} + 0,839478z^{-2}}$ →	26,7	23,5
5	$\frac{0,0998 - 1,06p}{(1 + 340p)(1 + 56,9p)} = \frac{0,0998 - 1,06p}{1 + 369,9p + 19330p^2}$ →	$\frac{0,241062E-03z^{-1} + 0,225129E-03z^{-2}}{1 - 1,80985z^{-1} + 0,814518z^{-2}}$ →	27,1	25,2

V - 3 - COMPARAISON DES MISES EN OEUVRE

Les méthodes sont différentes quant à l'ampleur des moyens employés.

- La méthode 1 nécessite seulement un enregistreur continu.
- Les méthodes 2, 3 utilisent le calculateur CII 10070 du Centre Interuniversitaire de calcul de Rennes, mais la méthode 3 peut être programmée sur le calculateur HP 2100 : en effet, il existe un algorithme récurrent pour la méthode des moindres carrés.
- Les méthodes 4 et 5 utilisent le calculateur HP 2100.

Dans la méthode 1, les enregistrements sont continus alors qu'ils sont échantillonnés dans les autres méthodes.

La méthode 1 est nécessaire avant les autres méthodes car elle permet de fixer la période d'échantillonnage en donnant un ordre de grandeur des constantes de temps.

D'autre part les méthodes 4 et 5 donnent la réponse impulsionnelle ou indicielle du processus, celles-ci sont difficilement utilisables directement ; pour obtenir un modèle en p il est nécessaire d'utiliser une méthode du type 2.

Comparons maintenant les durées d'expérimentation :

. Pour chaque méthode nous avons calculé UDEP en faisant une moyenne de mesures prises sur un temps variant entre 10 et 60 minutes après avoir attendu entre 30 et 60 minutes que le régime permanent soit atteint. Cette durée n'est pas comptée dans l'expérimentation.

Méthode	Durée de l'expérimentation
1	Environ 3/4 d'heure par enregistrement.
2	Environ 3/4 d'heure par enregistrement.
3	Environ 1 heure par enregistrement.
4	Environ 4 heures pour le 1 ^{er} enregistrement + 1 heure par enregistrement suivant.
5	Environ 4 heures pour le 1 ^{er} enregistrement + 1 heure par enregistrement suivant.

Les méthodes 1, 2, 3 ont une durée d'expérimentation plus courte que les méthodes 4 et 5.

Toutes les méthodes "marchent" avec un enregistrement, mais il est préférable de faire une moyenne sur plusieurs enregistrements pour améliorer le rapport signal sur bruit.

Les méthodes 3 et 4 sont les moins sensibles aux bruits ; la méthode 5 lorsque le biais est mal éliminé donne un gain statique erroné.

Dans les problèmes d'identification la méthode 1 est souvent appliquée car elle donne aisément un premier modèle ainsi que la période d'échantillonnage nécessaire à d'autres méthodes ; elle est insuffisante quand les mesures sont bruitées ou quand le processus est d'ordre élevé.

Dans le cas de mesures bruitées la simulation a montré que la méthode 3, la méthode 4 suivie de la 2 ou la méthode 5 suivie de la 2 donnent des résultats acceptables ~~même~~ avec des taux de bruit importants alors que l'application directe des méthodes 1 ou 2 est impossible.

Dans le cas de système d'ordre élevé la méthode 3 est aussi efficace que pour les cas d'ordre faible.

La méthode 3 présente également l'intérêt de donner directement un modèle en z qui est facilement utilisable pour la régulation. Elle est utilisable en temps réel en employant un algorithme des moindres carrés récurrents ⁽¹⁶⁾ ; elle ne nécessite pas de signal d'entrée spécial avec lequel on ne peut parfois exciter un processus.

La méthode 5 donne outre la réponse indiciaire discrète la séquence de pondération, utilisable en temps réel, qui peut servir de point de départ au calcul d'un régulateur.

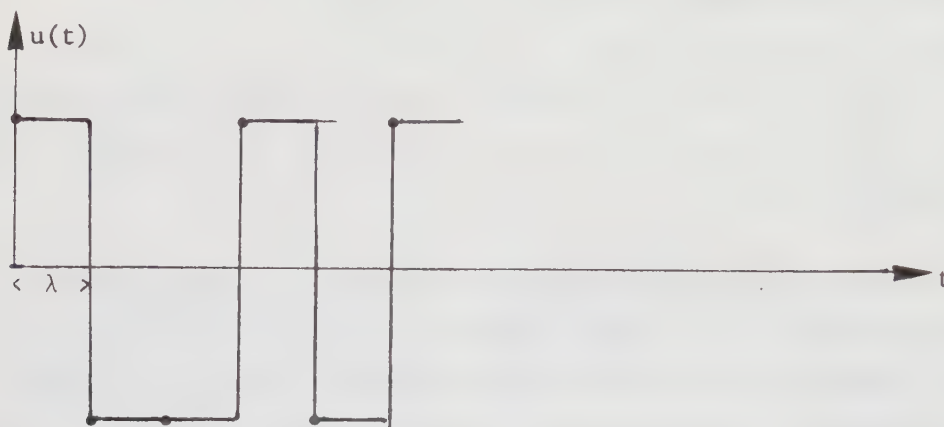
CONCLUSION

- Ce mémoire a été centré sur l'identification d'un processus à deux cuves par différentes méthodes dynamiques.
- Dans le premier chapitre l'étude théorique et statique du processus montre que le système peut être approché par un modèle linéaire du deuxième ordre.
- Dans le deuxième chapitre la décomposition graphique en somme d'exponentielles de la réponse indicielle continue donne la période d'échantillonnage nécessaire aux autres méthodes, ainsi qu'un premier modèle confirmé par l'application de la même méthode aux mesures échantillonnées.
- Dans le troisième chapitre le processus est identifié par la méthode des moindres carrés améliorée par K. Steiglitz et L.E. Mac Bride.
- Dans le quatrième chapitre est appliquée une méthode d'obtention de la réponse impulsionnelle ou indicielle par corrélation entre une séquence binaire pseudoaléatoire excitant le système et sa réponse.
- Ensuite dans le chapitre V sont comparés les différentes méthodes ; les modèles trouvés représentent finement le processus hydraulique, mais les mises en oeuvre aboutissant à ces modèles sont différentes par le matériel employé, la durée de l'expérimentation ainsi que le type des signaux excitant le système.

ANNEXE - DEFINITION ET PROPRIETES DES SEQUENCES BINAIRES
PSEUDOALEATOIRES (16), (17)

A - 1 - DEFINITION

La SBPA est un signal périodique de période $M\lambda$, en escalier dont l'amplitude ne prend que deux valeurs $\pm \text{UECH}$



$$u(t) = u(k\lambda) \text{ pour } k\lambda \leq t < (k+1)\lambda$$

La SBPA est caractérisée par trois paramètres : son amplitude UECH , sa durée élémentaire λ , et sa période $M\lambda$.

Sur le tableau (A,1) sont indiquées les suites de valeurs $U(k\lambda)$ prises par les SBPA employées sur une séquence pour $M = 3, 7, 15, 31, 63, 127$.

On définit à partir de la SBPA un signal $u'(t)$ avec

$$u'(t) = u(t) + \text{UECH}$$

A - 2 - PROPRIETES DE LA SBPA

$$A,2,1 \quad \text{Calcul de} \quad \sum_{k=0}^{M-1} \frac{u(k\lambda)}{u(k\lambda)} = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{u((k-s)\lambda)}{u((k-s)\lambda)}$$

$$\sum_{k=0}^{M-1} u(k\lambda) = \text{UECH}$$

$$A,2,1 \quad \text{Calcul de} \quad \sum_{k=0}^{M-1} \frac{u^2(k\lambda)}{u^2(k\lambda)} = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{u^2((k-s)\lambda)}{u^2((k-s)\lambda)}$$

$$\sum_{k=0}^{M-1} u^2(k\lambda) = M \text{ UECH}^2$$

$$A,2,2 \quad \text{Calcul de} \quad \sum_{k=0}^{M-1} \frac{u'(k\lambda)}{u'(k\lambda)} = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{u'((k-s)\lambda)}{u'((k-s)\lambda)}$$

$$\sum_{k=0}^{M-1} u'(k\lambda) = (M + 1) \text{ UECH}$$

$$A,2,3 \quad \text{Calcul de} \quad \sum_{k=0}^{M-1} \frac{u'^2(k\lambda)}{u'^2(k\lambda)} = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{u'^2((k-s)\lambda)}{u'^2((k-s)\lambda)}$$

$$\sum_{k=0}^{M-1} u'^2(k\lambda) = 2(M + 1) \text{ UECH}^2$$

$$A,2,4 \quad \text{Calcul de} \quad \sum_{k=0}^{M-1} \frac{u(k\lambda) u((k-i)\lambda)}{u(k\lambda) u((k-i)\lambda)} \quad i \neq 0$$

$$\sum_{k=0}^{M-1} u(k\lambda) u((k-i)\lambda) = - \text{UECH}^2$$

$$A,2,5 \quad \text{Calcul de} \quad \sum_{j=0}^{M-1} \frac{u''^2(j\lambda)}{u''^2(j\lambda)}$$

$$\sum_{j=0}^{M-1} u''^2(j\lambda) = \sum_{j=0}^{M-1} \left(\sum_{i=0}^k u'((j-i)\lambda) \right)^2 = \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{i=0}^k \sum_{i'=0}^k u'((j-i)\lambda) u'((j-i')\lambda)$$

$$\sum_{i=0}^k \sum_{i'=0}^k \sum_{j=0}^{M-1} u'((j-i)\lambda) u'((j-i')\lambda) = \sum_{i=0}^k \sum_{i'=0}^k \sum_{j=0}^{M-1} u'((j-i+i')\lambda) u'(j\lambda)$$

$$\text{mais } \sum_{j=0}^{M-1} u'((j-i+i')\lambda) u'(j\lambda) = \sum_{j=0}^{M-1} (u((j-i+i')\lambda) + \text{UECH}) (u(j\lambda) + \text{UECH}) =$$

$$\sum_{j=0}^{M-1} u((j-i+i')\lambda) u(j\lambda) + 2 \text{ UECH} \sum_{j=0}^{M-1} u((j-i+i')\lambda) + M \text{ UECH}^2$$

D'après les propriétés de la SBPA

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{M-1} u((j-i+i')\lambda) u(j\lambda) &= -UECH^2 && \text{pour } i - i' \neq 0 \\ &= M UECH^2 && \text{pour } i - i' = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^{M-1} u((j - i + i')\lambda) = UECH$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sum_{j=0}^{M-1} u((j - i + i')\lambda) u'(j\lambda) &= (M + 1) UECH^2 && \text{pour } i - i' \neq 0 \\ &= 2(M + 1) UECH^2 && \text{pour } i - i' = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{M-1} u''^2(j\lambda) &= k(k + 1) (M + 1) UECH^2 + (k + 1) 2(M + 1) UECH^2 \\ &= (k + 1) (k + 2) (M + 1) UECH^2 \end{aligned}$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (1) - NASLIN P., "Technologie et calcul pratique des systèmes asservis", Dunod éd., Paris, 1968, p. 123.
- (2) - V.L. STREETER, Handbook of fluid dynamics, Mac Graw Hill, 1961.
- (3) - SCHULTZ D.G. et MELSA J.L., "State functions and linear control systems", Mc Graw Hill Book Compagny, New York, 1967, p. 112-115.
- (4) - G. VALLEE, J.B. BELIN, G. BEAUGAS, Symposium sur l'informatique médicale et la gestion automatisée d'un hôpital, Toulouse 1968, p. 165 à 178, Edition Agip, 15, Rue Auber PARIS 75009.
- (5) - C. BRIE, J. BARBIN, D. LE STRAT, Identification déterministe, Laboratoire d'Automatique, I.N.S.A. Rennes, juin 1972, non publié.
- (6) - K.J. ASTROM and P. EYKHOFF, System identification - A Survey Automatica, vol.7, p. 123-162, 1971.
- (7) - J. RICHALET, A. RAULT, R. POULIQUEN, Identification des processus par la méthode du modèle, Gordon et Breach, 1971.
- (8) - S. GENTIL, Etude comparative de diverses méthodes statistiques d'identification de systèmes dynamiques (thèse de 3^{ème} cycle), Grenoble, juillet 1972.
- (9) - D.W. CLARKE, Generalized - least - squares estimation of the parameters of a dynamic model, first IFAC symposium on identification (Prague 1967).

- (10) - J. DURBIN, Estimation of parameters in time series regression models 1960, Biometrika, vol.37, p. 409 à 429.
- (11) - K. STEIGLITZ and L.E. MAC BRIDE, A technique for the identification of linear systems, IEEE transactions on automatic control, october 1965, AC-10, p. 461 à 464.
- (12) - J.R. RAGAZZINI, G.F. FRANKLIN, Les systèmes asservis échantillonnés, Dunod, Paris 1962.
- (13) - P.A.W. BRIGGS, K.R. GODFREY, P.H. HAMMOND, Estimation of process dynamic characteristics by correlation methods using pseudo random signals, IFAC, Prague 1967.
- (14) - M. AUBRY, Etude de signaux pseudo-aléatoires applications à l'identification (rapport de D.E.A.), ENSM Nantes, juin 1973.
- (15) - C. BRIE, L. BROSSARD, P. GUEZENNEC, Identification par corrélation, Laboratoire d'Automatique, I.N.S.A. Rennes, juin 1973, non publié.
- (16) - W.D.T. DAVIES, System identification for self-adoptive control, WILEY interscience 1970.
- (17) - W.D.T. DAVIES, Using the binary maximum length sequence for the identification of system dynamics. Proceedings IEEE, Vol.114, N°10, october 1967.
- (18) - A. BARRAUD, Contribution à l'identification des séquences de pondération des systèmes dynamiques (thèse de Docteur Ingénieur) ENSM Nantes, juillet 1971.

- (19) - J.G. TRUXAL, Control Engineer's Handbook, Mac Graw Hill, 1958.
- (20) - E.S. SAVAS, Computer control of industrial processes, Mac Graw Hill, 1965.
- (21) - J. MARCUS, Echantillonnage et quantification, Gauthier-Villars, Paris, 1965.
- (22) - B.W. RUST, W.R. BURRUS, R. BELLMAN, Mathematical programming and the numerical solution of linear equations, American Elsevier Publishing Company, 1972.
- (23) - A.P. SAGE, J.L. MELSA, Estimation theory with applications to communications and control, Mac Graw Hill Compagny, 1971.
- (24) - R. FARDIN, Guide de la mesure et de la régulation industrielles, Eyrolles, 1969.
- (25) - J.T. TOU, Digital and sampled Data control systems, Mac Graw Hill, 1959.
- (26) - J.C. RADIX, Introduction au filtrage numérique : lissage de données, estimation de paramètres, identification de processus, Eyrolles 1970.
- (27) - J. LOEB, Identification expérimentale des processus industriels, Dunod, Paris 1967.
- (28) - A.P. SAGE and J.L. MELSA, System identification, Academic Press 1971.

- (29) - E. MISHKIN and L. BRAUN, Adaptive control systems, Mac Graw Hill, 1961.
- (30) - R.C.K. LEE, Optimal estimation identification and control, Cambridge Massachusetts, MIT Press 1964.
- (31) - P. DE LARMINAT, Identification des systèmes dynamiques, E.N.S.M., cours d'identification.

VU :

Le Président de la Thèse

P.Y. ARQUES

VU :

Le Directeur de Thèse

R. GERBER

VU et APPROUVE

RENNES, 1e

Le Directeur de l'U.E.R.

VU et PERMIS D'IMPRIMER

RENNES, 1e

Le Président de l'Université de RENNES,

C. CHAMPAUD.

